



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Física Armando Dias Tavares

Matheus da Silva Silos

Caracterização dos conceitos Físicos nos instrumentos musicais de cordas dedilhadas

Rio de Janeiro

2023

Matheus da Silva Silos

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado como requisito parcial para
obtenção do título de Bacharelado em
Física, ao Instituto de Física Armando Dias
Tavares, da Universidade do Estado do Rio
de Janeiro.

Aprovado em de dezembro de 2023.

Banca Examinadora:

Rio de Janeiro

2023

Ficha elaborada pelo autor através do
Sistema para Geração Automática de Ficha Catalográfica da Rede Sirius - UERJ

S585 Silos, Matheus da Silva.
 Caracterização dos conceitos Físicos nos
instrumentos musicais de cordas dedilhadas / Matheus
da Silva Silos. - 2023.
 79 f.

 Orientadora: Maria Lúcia Grillo Perez Baptista.
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto
de Física, para obtenção do grau de bacharel em Física.

 1. Instrumentos de cordas dedilhadas -
Monografias. 2. amortecimento - Monografias. 3.
modos normais de vibração - Monografias. I.
Baptista, Maria Lúcia Grillo Perez. II. Universidade
do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física.
III. Título.

RESUMO

SILOS, M. S. Caracterização dos conceitos físicos nos instrumentos musicais de cordas dedilhadas. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

No presente trabalho pretende-se caracterizar os conceitos físicos por trás dos instrumentos musicais de cordas dedilhadas, de modo que se possa descrever o comportamento oscilatório desta classe de sistemas e compreender os fenômenos físicos que influenciam nas vibrações. Tal análise será feita utilizando-se de um violão e uma viola caipira enquanto exemplos destes instrumentos, quando serão deduzidas as equações de onda unidimensional e bidimensional, demonstrando os modos normais de vibração em toda estrutura do instrumento e como tais vibrações são afetadas por parâmetros físicos pré-estabelecidos, como: tensão, rigidez e elasticidade. Serão discutidos como os conceitos físicos estudados produzem alterações em instrumentos musicais de mesma classe e determinando experimentalmente o fator de amortecimento, utilizando o método de decremento logarítmico, será tratado como ele age sobre o sistema, demonstrando o surgimento de tal conceito em um sistema dinâmico e sua influência nas vibrações.

Palavras-chave: Instrumentos de cordas dedilhadas, amortecimento, modos normais de vibração, estrutura do violão e da viola caipira, decremento logarítmico.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Objeto movendo-se no fluido.

Figura 1.2 - Sistema massa mola amortecido.

Figura 1.3 - Laço de histerese.

Figura 1.4 - Fator de amortecimento.

Figura 1.5 - Oscilação amortecida.

Figura 2.1 – Corda.

Figura 2.2 - Corda, forças e ângulo.

Figura 2.3 - Corda, condições iniciais.

Figura 3.1 - Onda no referencial “O”.

Figura 1 – Onda no referencial “O”.

Figura 2 – Onda no ponto médio da corda.

Figura 3.4 – Interferência das ondas.

Figura 3 – Ondas progressivas no ponto médio.

Figura 4 – Modos vibratórios transversais.

Figura 5 - Vibração longitudinal.

Figura 6 - Vibração torcional.

Figura 7 - Elemento infinitesimal da corda.

Figura 8 – Estrutura do violão.

Figura 4.9 - Formatos das travessas.

Figura 4.3 – Diagrama da radiação sonora em relação às frequências.

Figura 4.4 – Plano em duas dimensões.

Figura 4.5 – Vibrações na estrutura do violão e da viola caipira.

Figura 4.6 – Envelope sonoro.

Figura 5.1 - Resposta ao impulso de um sistema subamortecido.

Figura 5.2 – Decaimento das vibrações.

Figura 6.1 – Forma de onda, Praat.

Figura 6.2 – Cordas do violão.

Figura 6.3 – Forma de onda.

Figura 6.4 – Espectrograma.

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Fator de amortecimento do violão e da viola caipira.

Tabela 6.2 – Média do fator de amortecimento por faixa de frequência.

Tabela 6.3 – Taxa de amortecimento, Teixeira.

LISTA DE CÓDIGOS

Código 6.1 - Leitura do sinal de áudio.

Código 6.2 – Transformada Rápida de Fourier.

Código 6.3 – Filtro passa banda.

Código 6.4 – Verificação de filtragem.

Código 6.5 – Transformada inversa de Fourier.

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 6.1 – Forma de onda. Matlab.

Gráfico 6.2 – Conversão de sinal FFT.

Gráfico 6.3 – Faixa de frequência.

Gráfico 6.4 – Forma de onda da frequência fundamental.

Gráfico 6.5 – Amplitude da frequência fundamental.

Gráfico 6.6 – Forma de onda do sinal filtrado.

Gráfico 6.7 – Relação amortecimento x frequência.

Gráfico 6.8 - Relação amortecimento x frequência abaixo de 300 Hz.

Gráfico 6.9 - Relação amortecimento x frequência acima de 300 Hz.

Gráfico 6.10 – Amortecimento x frequência, Teixeira.

SUMÁRIO

Introdução.....	9
1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O AMORTECIMENTO.....	11
1.1 Viscosidade do fluido	11
1.1.1 Amortecimento viscoso	13
1.2 Amortecimento interno.....	15
1.2.1 O amortecimento histerético	16
1.3 Amortecimento estrutural	18
1.3.1 Amortecimento em juntas	18
1.4 Intensidade do amortecimento de um sistema.....	19
2 CORDAS VIBRANTES.....	23
2.1 Dedução da equação de onda unidimensional	23
2.1.1 Solução para a equação de onda unidimensional	25
2.1.2 Aplicação em onda em instrumentos de cordas dedilhadas:	27
3 MODOS DE VIBRAÇÃO EM CORDAS	30
3.1 Onda transversal	30
3.1.1 Cálculo dos modos normais.....	34
3.2 Onda longitudinal.....	37
3.3 Onda torcional	39
3.4 Vibrações de oitava	41
4 ESTRUTURA DO VIOLÃO E DA VIOLA CAIPIRA.....	42
4.1 Dedução da equação de onda bidimensional	44
4.1.1 Solução para equação de onda bidimensional	46
4.2 Timbre.....	49
5 MÉTODO DO DECREMENTO LOGARÍTMICO.....	51
6 EXPERIMENTO.....	54
6.1 Descrição do experimento.....	54
6.2 Procedimento experimental.....	56
6.3 Cálculo do amortecimento.....	63
6.4 Resultado experimental	63
6.4.1 Análise de resultado	66
6.4.2 Comparação com o trabalho de referência.....	72
CONCLUSÃO	76

Introdução

A acústica representa o ramo da física que estuda o som e seus fenômenos. Quando tratamos sobre o som nos referimos a ondas mecânicas capazes de se propagar em qualquer meio material como sólidos e fluidos. Assim, no presente trabalho pretende-se investigar a física por trás dos instrumentos musicais de cordas dedilhadas, entendendo como esta classe de instrumentos funciona e os conceitos físicos que o compõem como fenômenos ondulatórios, vibrações em corpos rígidos e amortecimento. A capacidade de entendermos os conceitos envolvidos nestes instrumentos nos permite fazer previsões sobre seu comportamento e minimizar problemas em sua construção, como por exemplo falhas estruturais, baixa produção acústica e problemas de impedância acústica.

Apesar de toda teoria tratada neste trabalho poder ser aplicada a qualquer instrumento musical de cordas dedilhadas, neste trabalho será tomado como sistema experimental um violão e uma viola caipira. A escolha dos objetos se deve por pertencerem à mesma classe instrumental, mas possuírem diferenças estruturais significativas, de modo a ser analisado como as desigualdades alteram a acústica dos instrumentos. Assim, o objetivo geral deste trabalho é caracterizar os conceitos físicos em sistemas dinâmicos, em especial os instrumentos musicais, para que possamos descrever o comportamento desta classe de sistemas, compreender como ocorre o surgimento de fenômenos físicos e de que maneira influenciam suas vibrações.

Para a construção deste estudo primeiramente será tratada a dissipação de energia através dos amortecimentos fundamentais por ser presente em qualquer estrutura vibrante e, a partir de tais esclarecimentos, será estudada toda a estrutura de vibração do sistema em questão. Demonstrando as vibrações unidimensionais e bidimensionais em toda construção dos instrumentos de cordas dedilhadas, torna-se possível observar como ocorre a irradiação das vibrações até que o som seja produzido, compreendendo como ocorrem as vibrações nos tampos superior e inferior do violão que são componentes de alta vibração e têm grande responsabilidade na produção sonora do instrumento. Então, utilizando como ferramenta para se calcular o coeficiente de amortecimento ao qual um sistema está sujeito, a partir da captação acústica de uma vibração livre demonstra-se o método do decremento logarítmico.

Por fim, utilizaremos o violão e a viola caipira para calcular o fator de amortecimento e analisar acusticamente os instrumentos mencionados, mostrando a diferença entre eles e porque elas ocorrem. Assim, busca-se representar um sistema complexo que possui muitas variáveis, onde no decorrer deste trabalho, procura-se esclarecer como a alteração dos componentes que

estruturam um instrumento de cordas tal qual o violão e a viola caipira podem alterar seu comportamento que, também por serem instrumentos temperados, resulta na exatidão das frequências ao excitarmos o instrumento.

1 CONSIDERAÇÕES SOBRE O AMORTECIMENTO

Tratando das cordas dedilhadas, parte da energia inicial cedida pelas cordas é irradiada na forma de som, mas uma fração da energia será dissipada nos materiais em razão do amortecimento estrutural, interno e outra parte da energia por meio do ar, já que as cordas excitadas precisam vencer a viscosidade do fluido. Por este motivo, o amortecimento representa o fenômeno físico no qual a energia mecânica sobre um sistema dinâmico é perdida. Conhecer o comportamento de tal evento é de suma importância para utilização, análise e teste de um sistema vibratório, pois entender como a estrutura dissipa a energia nos permite impor restrições sobre as excitações para obter melhor desempenho e prevenir que o sistema colapse (SILVA apud MUSOLINO, 2011).

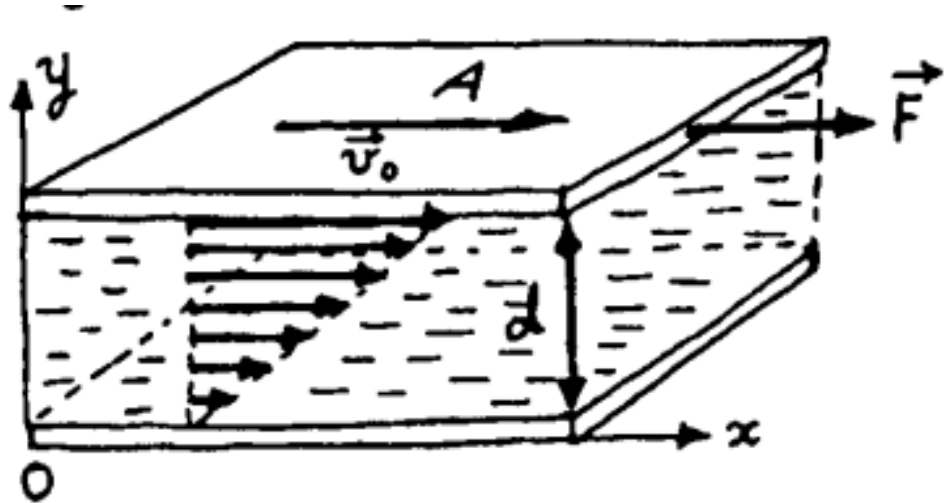
A partir disso, consideramos os três amortecimentos fundamentais presentes em qualquer sistema: fluídico (ou viscoso), interno e estrutural (ou Coulomb). Estes amortecimentos são responsáveis pela dissipação energética no sistema em forma de calor e som (SILVA apud MUSOLINO, 2011). Podemos definir o coeficiente de amortecimento de um sistema em oscilação livre para caracterizar a amplitude e o tempo das vibrações. Tal coeficiente é classificado em: subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido. O fator de amortecimento representa uma das características mais sensíveis do material ou sistema, tanto em escala micro quanto macroscópica (LAZAN apud COSSOLINO e PEREIRA, 2010), sendo causado pela combinação dos mecanismos físicos, efeitos termoelásticos e correntes de Foucault em materiais ferromagnéticos (MUSOLINO, 2011). No caso as considerações sobre o amortecimento se devem à sua importância dentro do sistema de cordas dedilhadas para entendermos como o amortecimento influencia a construção dos instrumentos e o decaimento das vibrações, fatores fundamentais para produção sonora.

1.1 Viscosidade do fluido

O amortecimento fluídico está relacionado à viscosidade do fluido, sendo oriundo da força de arrasto gerada pela movimentação de um material em relação a um meio líquido ou gasoso. Desta maneira, a chamada “viscosidade do fluido” representa uma força volumétrica de atrito entre as camadas que compõem o fluido, sendo que, o volume total do fluido pode ser entendido como uma sobreposição de camadas. Tal força de atrito aparece quando o fluido entra em movimento em razão de uma força externa e, desta forma, o deslizamento entre as camadas do fluido origina uma tensão tangencial.

A partir disso, iremos supor um fluido volumétrico de espessura “d” contido entre duas placas, (ver figura 1.1). Podemos realizar uma força constante \vec{F} sobre a placa superior para que desloque com velocidade \vec{v}_0 constante. Temos a velocidade constante, sem aceleração porque a resistência que o fluido exerce sobre o movimento do corpo é igual e contrária à força inicial. Esta oposição de forças iguais irá anular a aceleração relacionada à força inicial.

Figura 1.1 - Objeto movendo-se no fluido.



Fonte: NUSSENZVEIG, 1996, p. 33.

Segundo Nussenzveig (1996), “um fluido real em contato com um sólido permanece em repouso em relação à superfície de contato, de modo que é arrastado juntamente a ela.”. Dessa forma, a camada de fluido imediata à placa superior irá se deslocar também com velocidade v_0 . Entretanto, como o volume total do fluido pode ser entendido como uma sobreposição de camadas, as camadas mais distantes tendem a se manter em repouso, pela primeira lei de Newton. Neste caso, dado o atrito entre as camadas do fluido, a velocidade de cada uma das camadas varia inversamente com a distância “d”. Assim podemos escrever a seguinte equação para a velocidade.

$$\vec{v}(y) = \frac{\vec{v}_0}{d} y \quad (1.1)$$

Considerando a resistência entre as camadas do fluido, a tensão tangencial $\frac{F}{A}$ (força por unidade de área) necessária para manter o deslocamento do corpo com velocidade constante v_0 é proporcional à variação espacial da velocidade, ou seja, a variação de velocidade na direção y é proporcional à tensão, resultando na lei de Newton da viscosidade (NUSSENZVEIG, 1996).

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d} = \eta \frac{dv}{dy} \quad (1.2)$$

A letra grega η presente na equação acima, é uma constante de proporcionalidade que representa o coeficiente de viscosidade do fluido e $\frac{dv}{dy}$ a variação infinitesimal da velocidade na direção y. Neste contexto, pode ser demonstrado como a viscosidade do fluido irá influenciar o amortecimento viscoso que por sua vez inibe as vibrações de um sistema.

1.1.1 Amortecimento viscoso

Para o caso em que se considera um sistema mecânico real, possuindo n graus de liberdade, sua equação de movimento pode ser escrita na forma (MORAIS, 2018):

$$[M]\ddot{x} + [C]\dot{x} + [K]x = [f] \quad (1.3)$$

de maneira que:

- $[M]$: matriz de massas.
- $[C]$: matriz de amortecimento.
- $[K]$: matriz de rigidez.

Este modelo representa a situação mais geral possível para um sistema. Entretanto, devido à alta complexidade dos modelos de amortecimento para n graus de liberdade, usualmente utiliza-se o modelo viscoelástico para um grau de liberdade, que apesar de representar uma situação espacialmente limitada, permite-nos uma análise simplificada e entendimento sobre o fenômeno do amortecimento.

Como visto na seção 1.1, considera-se que a força viscosa de amortecimento é proporcional à velocidade e representa oposição ao movimento. Com isso podemos definir tal força como (MASOTTI, 2013):

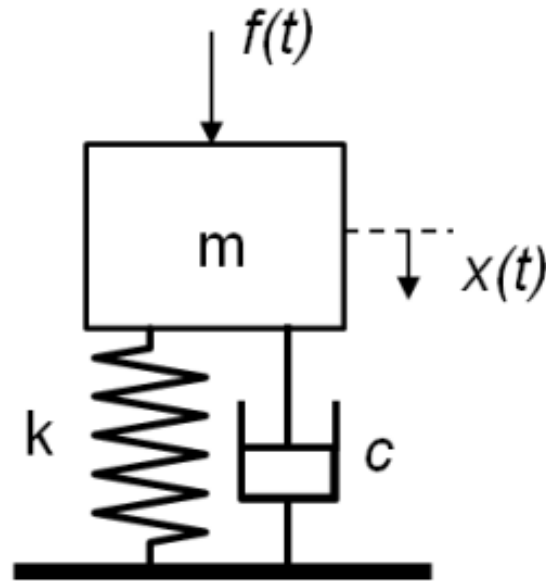
$$F = -c\dot{x} \quad (1.4)$$

de maneira que:

- c: coeficiente de viscosidade, ou seja, o mesmo coeficiente η mostrado na equação 1.2.
- \dot{x} : velocidade do corpo em deslocamento.

Para deduzir o amortecimento viscoso será considerado um sistema massa mola amortecido em oscilação livre com um grau de liberdade (figura 1.2), mas que pode ser comparado a uma oscilação elástica sobre um fluido, no qual sua equação de movimento é dada por:

Figura 1.2 - Sistema massa mola amortecido.



Fonte: MASOTTI, 2013, p. 47.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t, x) \quad (1.5)$$

- m : massa do corpo deslocado.
- \ddot{x} : aceleração do corpo.
- c : coeficiente de viscosidade
- \dot{x} : velocidade do corpo em deslocamento.
- k : constante elástica de restauração à posição de equilíbrio.
- x : deslocamento da posição de repouso.

Considerando $f(t) = 0$ e definindo os novos parâmetros w_0 e ζ , podemos reescrever a equação (1.5) da forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.6)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta w_0 \dot{x} + w_0^2 x = 0 \quad (1.7)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.8)$$

- w_0 : frequência natural de vibração.

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2w_0m} \quad (1.9)$$

- ζ : Coeficiente de amortecimento.

Neste contexto, a forma como a equação (1.7) está escrita, com os termos de frequência e amortecimento bem definidos, ajuda a perceber como as constantes de massa, elasticidade e viscosidade relativas ao sistema influenciaram a dinâmica da estrutura.

1.2 Amortecimento interno

O amortecimento interno está associado a inomogeneidades existentes na estrutura do material, como falhas estruturais, impurezas internas e efeitos termoelásticos causados por gradientes locais de temperatura (COSSOLINO e PEREIRA, 2010).

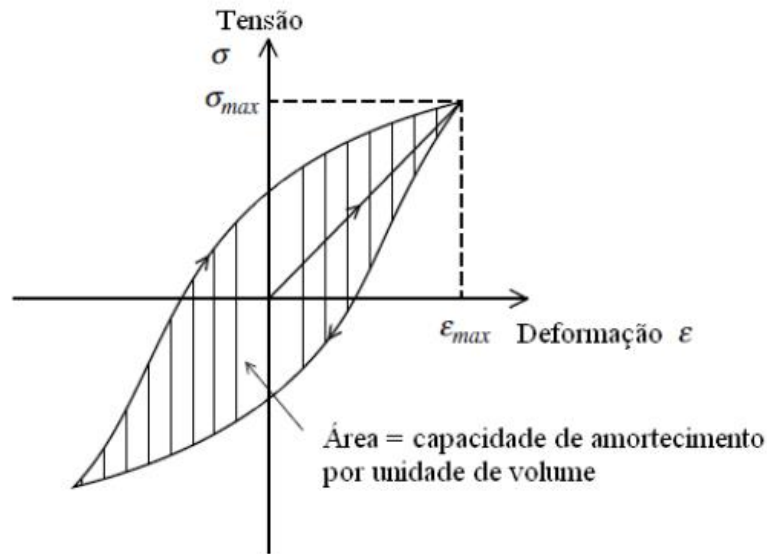
Os materiais que dissipam energia de forma cíclica estão sujeitos ao fenômeno da curva de tensão-deformação, que graficamente forma o chamado laço de histerese (figura 1.3), onde a área do laço representa a capacidade de dissipação energética, ou seja, a capacidade de amortecimento do material por ciclo e por unidade de volume, conforme equação 1.10.

$$I = \oint \sigma d\varepsilon \quad (1.10)$$

- I : Capacidade de amortecimento do material.
- σ : Tensão exercida no material.
- ε : Deformação sofrida pelo material em resposta a tensão.

A integral cíclica da tensão com o respectivo deslocamento corresponde ao trabalho feito pelo amortecimento. Dessa maneira esta integral representa a energia dissipada por ciclo de movimento (COSSOLINO; PEREIRA, 2010).

Figura 1.3 - Laço de histerese.



Fonte: COSSOLINO; PEREIRA, 2010, p. 4

1.2.1 O amortecimento histerético

Independentemente do nível de tensão feito ao material, nenhuma estrutura possui comportamento perfeitamente elástico e a inelasticidade do material leva à dissipação de energia. Estruturas e materiais que dissipam energia através de ciclos apresentam o fenômeno chamado ciclo de histerese formado pela curva de tensão-deformação no material. Neste evento a energia é geralmente dissipada em forma de calor, entretanto em decorrência de modificações internas ao material é possível a ocorrência de efeitos não lineares na estrutura que aumentam o nível de energia do sistema.

O amortecimento histerético é associado a fricções internas ao material durante as vibrações, sendo que a força de atrito é diretamente proporcional à velocidade das partículas e inversamente proporcional à frequência de vibração (MASOTTI, 2013). Neste sentido, se considerarmos um sistema linear, podemos definir o conceito de função de transferência, que relaciona a excitação e a resposta desse sistema em função da frequência (HENRIQUE, 2002).

$$H_w = \frac{X_w}{F_w} \quad (1.11)$$

- H_w : Características modais do sistema
- X_w : Resposta vibratória do sistema.

- F_w : excitação exercida.

Para o amortecimento histerético, vamos considerar um movimento forçado em que o coeficiente de amortecimento equivalente pode ser escrito na forma: $C_{eq} = \frac{d}{w}$ em que “d” representa o coeficiente constante de amortecimento histerético (EWINS apud MORAIS, 2018). Portanto, consideraremos a equação de movimento na forma:

$$m\ddot{x} + C_{eq}\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.12)$$

considerando $f(t) = 0$, procuramos uma solução da forma $x(t) = Xe^{\lambda t}$ onde X e λ são constantes complexas

$$m\lambda^2 + C_{eq}\lambda + k = 0 \quad (1.13)$$

Análogo ao demonstrado no item 1.1.1 em que $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\zeta = \frac{c}{2w_0m}$, a partir da equação (1.13) obtemos duas raízes na forma $\lambda_{1,2} = -\zeta w_0 \pm iw_0\sqrt{1-\zeta^2}$. Assim, alcançamos a seguinte solução, uma função exponencial complexa na forma:

$$x(t) = Xe^{-\zeta w_0 t} e^{iw_0\sqrt{1-\zeta^2}t} \quad (1.14)$$

Considerando agora que o sistema está sujeito a uma excitação harmônica da forma $f(t) = Fe^{\lambda t}$, logo um regime de resposta forçada, substituindo $\lambda = iw$ a equação de movimento se torna:

$$(-w^2m + id + k)Xe^{iwt} = Fe^{iwt} \quad (1.15)$$

em que F representa uma constante complexa. Podemos então utilizar o conceito de função de transferência para escrever uma relação entre a excitação e a resposta do sistema.

$$H(w) = \frac{X}{F} = \frac{1}{(k-w^2m)+id} \quad (1.16)$$

$$H(w) = \frac{X}{F} = \frac{1/k}{1-(w/w_0)^2+i(\xi)} \quad (1.17)$$

de maneira que a equação acima caracteriza a função de resposta do sistema e o termo $\xi = \frac{d}{k}$ representa o coeficiente de amortecimento histerético.

1.3 Amortecimento estrutural

Um sistema mecânico pode possuir diferentes materiais, sendo desta diversidade que surge o amortecimento estrutural. As junções entre os distintos materiais que compõem o sistema sofrem fricção e impacto gerando dispersão energética quando o sistema é excitado, ou seja, este amortecimento não é inerente a um material, mas é causado pelo atrito entre materiais heterogêneos que compõem o sistema, tal qual instrumentos de cordas dedilhadas que são construídos com a junção de materiais dissemelhantes. Logo, a dissipação energética é variável para cada sistema, não havendo uma maneira analítica generalizada para calcular o amortecimento estrutural.

Usualmente o amortecimento estrutural é estimado por meio de medições do amortecimento mecânico total do sistema. Portanto, quando se pretende estudar o amortecimento estrutural calcula-se primeiro o amortecimento interno para subtrair do amortecimento mecânico total e assim obter um valor aproximado para o amortecimento estrutural, já que, de acordo com Martínez apud Masotti (2013), o amortecimento estrutural representa uma grande porção da dissipação energética, muito maior que o amortecimento interno.

1.3.1 Amortecimento em juntas

Conforme tratado anteriormente no item 1.3, o amortecimento estrutural surge do contato entre diferentes materiais num sistema, onde a dissipação energética apresentada depende das características de cada material. Para a acústica é de extrema importância entender como ocorre a transferência de energia entre os materiais, pois tem-se como base a transferência de energia mecânica em som para o funcionamento ideal de um instrumento musical, assim obtendo melhor radiação sonora. Tal transferência de energia é tratada por meio do conceito de impedância acústica.

A impedância se traduz como a resistência que o meio oferece à passagem da energia. Tal resistência é agravada nas junções dos diferentes materiais, pois valores discrepantes de impedância entre dois materiais em contato geram reflexões de ondas no sistema, reduzindo a transferência de energia entre os materiais e prejudicando a radiação sonora do instrumento (HENRIQUE, 2002).

Apesar da resistência que o meio oferece às vibrações, o fenômeno da impedância é de extrema importância para o funcionamento adequado de um instrumento musical. Para uma boa produção acústica é necessária a ocorrência do fenômeno, pois através da reflexão das ondas as vibrações ressoam na estrutura do sistema fazendo com que o som permaneça por mais tempo. Portanto, podemos considerar que a impedância é necessária para o funcionamento do instrumento, mas havendo um limite que não prejudique a passagem das vibrações entre os meios que compõem o sistema.

Considerando a propagação de uma onda plana, a impedância característica do meio pode ser encontrada pelo produto da densidade pela velocidade do som no meio, (ver equação 1.18)

$$I = \rho c \quad (1.18)$$

1.4 Intensidade do amortecimento de um sistema

Um sistema oscilatório é capaz de possuir inúmeros graus de liberdade, que são coordenadas independentes que descrevem o movimento do sistema, onde tais movimentos podem ser descritos por equações diferenciais. Esta análise que será feita sobre as vibrações do violão leva em conta que a rigor, quando a corda é excitada haverá quatro possíveis formas de vibração, que serão explicitadas mais à frente. A mais marcante das possibilidades de oscilação é a transversal, feita de maneira que as outras possíveis direções de oscilação apenas decorrem da oscilação transversal, pelo fato de o violão não ser um sistema rigorosamente limitado em suas oscilações. Desta forma, será analisado o movimento unidimensional para descrever o amortecimento viscoelástico, tal demonstração mostra-se necessária para entendermos o método de decremento logarítmico que será mostrado no capítulo 5.

Como demonstrado no item 1.1.1, no amortecimento gerado pela viscosidade a força de atrito é proporcional à velocidade do corpo que se desloca. Esta força representa a oposição ao movimento, sendo descrito pela equação (1.19).

$$F = -c\dot{x} \quad (1.19)$$

Conforme Nussenzveig (1996) a equação de movimento unidimensional pode ser expressa pela equação (1.20)

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1.20)$$

- m : a massa do corpo deslocado.
- \ddot{x} : a aceleração do corpo.
- k : constante elástica de restauração à posição de equilíbrio.
- x : deslocamento da posição de repouso.

A partir da equação (1.19) e (1.20) podemos escrever uma nova equação para o movimento que leva em consideração a força que se opõe ao movimento.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (1.21)$$

A equação (1.21) pode ser reescrita com novos parâmetros $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$, na forma:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (1.22)$$

$$\ddot{x} + 2\zeta w_0 \dot{x} + w_0^2 x = 0 \quad (1.23)$$

- w_0 : frequência natural de vibração.
- ζ : parâmetro de amortecimento.

A equação (1.23) é uma equação diferencial linear de segunda ordem com coeficientes constantes, para resolvê-la buscamos uma solução complexa da forma:

$$z = e^{\gamma t} \quad (1.24)$$

de maneira que, a partir das derivadas da equação (1.24), podemos escrever a equação característica e determinar as raízes.

$$\gamma^2 + \zeta\gamma + w_0^2 = 0 \quad (1.25)$$

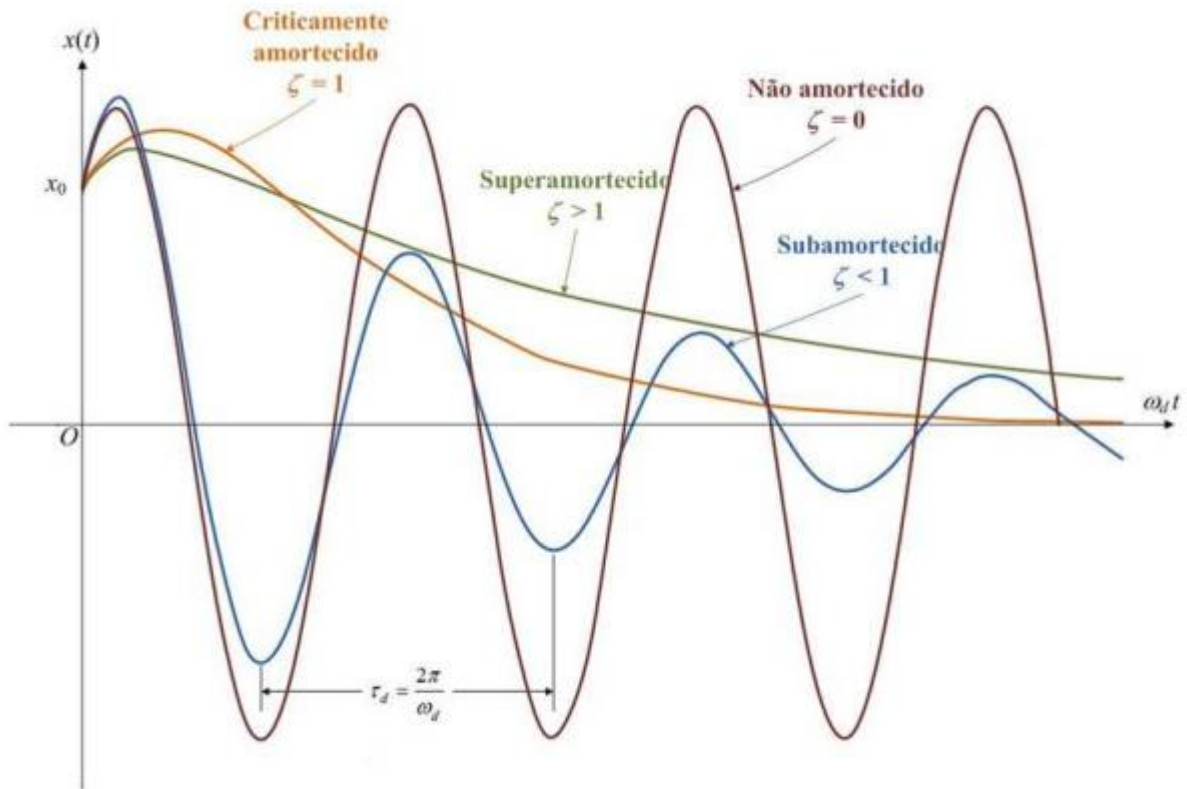
$$\gamma = w_0(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) \quad (1.26)$$

Pela equação (1.26) pode-se perceber que o comportamento da oscilação descrita depende do parâmetro de amortecimento ζ exercido sobre o movimento. O que direciona para três possibilidade da solução de γ , ou seja, três diferentes tipos de amortecimento:

- $\zeta > 1$: possui duas soluções reais, este caso é chamado de superamortecido.
- $\zeta = 1$: possui uma solução real, este caso é chamado criticamente amortecido.
- $1 > \zeta \geq 0$: possui duas soluções complexas, este caso é chamado de subamortecido.

Entretanto, nos sistemas superamortecido e criticamente amortecido não é gerado o movimento oscilatório desejado, (ver figura 1.4), logo não condiz com o amortecimento do violão e viola caipira enquanto sistemas estudados neste trabalho. Portanto apenas o caso subamortecido será considerado nas análises posteriores.

Figura 1.4 - Fator de amortecimento.



Fonte: COSSOLINO; PEREIRA, 2010, p. 6

Para encontrar uma solução no caso subamortecido temos a raiz de um número negativo, então pode-se reescrever γ na forma:

$$\gamma = w_0(-\zeta \pm iw_d) \quad (1.27)$$

com w_d sendo a frequência natural amortecida tendo o seguinte valor:

$$w_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.28)$$

Tomando a parte positiva de γ , temos que:

$$\gamma = w_0(-\zeta + iw_d) \quad (1.29)$$

Aplicando o resultado da equação (1.29) na (1.24), temos que:

$$z = P e^{w_0(-\zeta + i w_d)t} \quad (1.30)$$

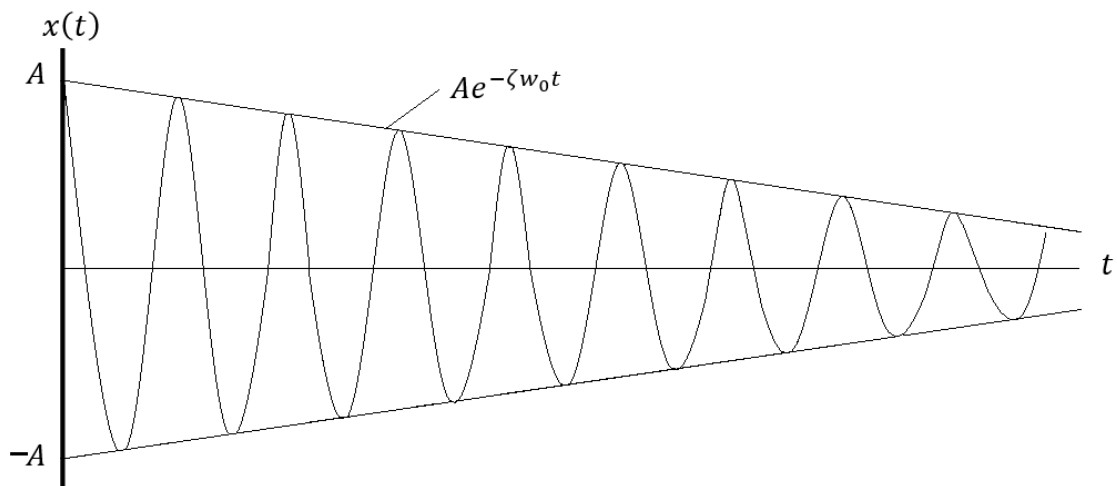
$$P = A e^{i\varphi} \quad (1.31)$$

- P: uma constante complexa arbitrária.
- A e φ : constantes reais arbitrárias.

Por fim, tomando a parte real da equação (1.30) com o parâmetro P substituído, tem-se a solução para o sistema subamortecido com equação da forma:

$$x = A e^{-\zeta w_0 t} \cos(w_d t + \varphi) \quad (1.32)$$

Figura 1.5 - Oscilação amortecida.



Fonte: Do autor.

Na figura 1.5 pode ser visto o claro decaimento energético gerado pelo amortecimento, neste caso um sistema subamortecido, onde o fator $A e^{-\zeta w_0 t}$ representa as amplitudes da oscilação que decaem com o tempo.

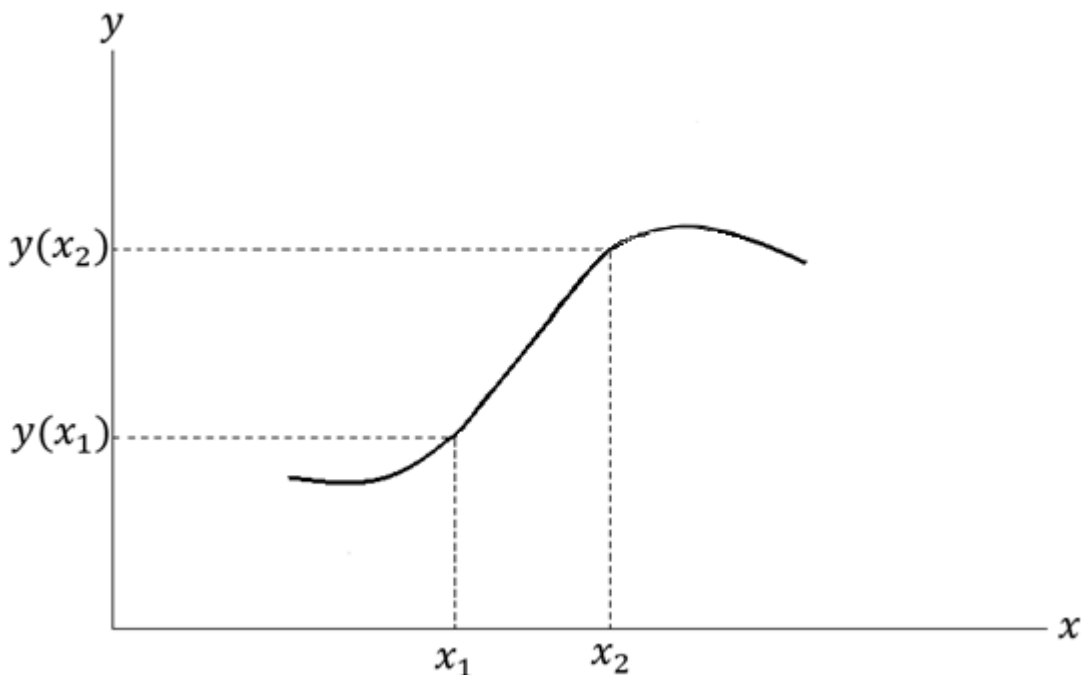
2 CORDAS VIBRANTES

Quando tratamos as vibrações em cordas como sistema físico analisado, em especial instrumentos musicais de cordas dedilhadas, as cordas estão sujeitas às seguintes vibrações: transversais, longitudinais, torcionais e de oitavas (HENRIQUE, 2002). As vibrações transversais são indiscutivelmente as mais destacadas e relevantes para se analisar, posto que a força excitadora é sempre transversal ao eixo, de modo que as demais vibrações decorrem de iniciarmos o movimento transversal na corda. Por esta razão as outras três vibrações processam-se com uma fração da energia inicial, sendo então vibrações de difícil percepção. Considerando pequenas oscilações, apenas a vibração transversal será levada em conta para os cálculos a seguir. Desta forma, será tomado apenas o movimento transversal da corda durante a dedução da equação de onda unidimensional.

2.1 Dedução da equação de onda unidimensional

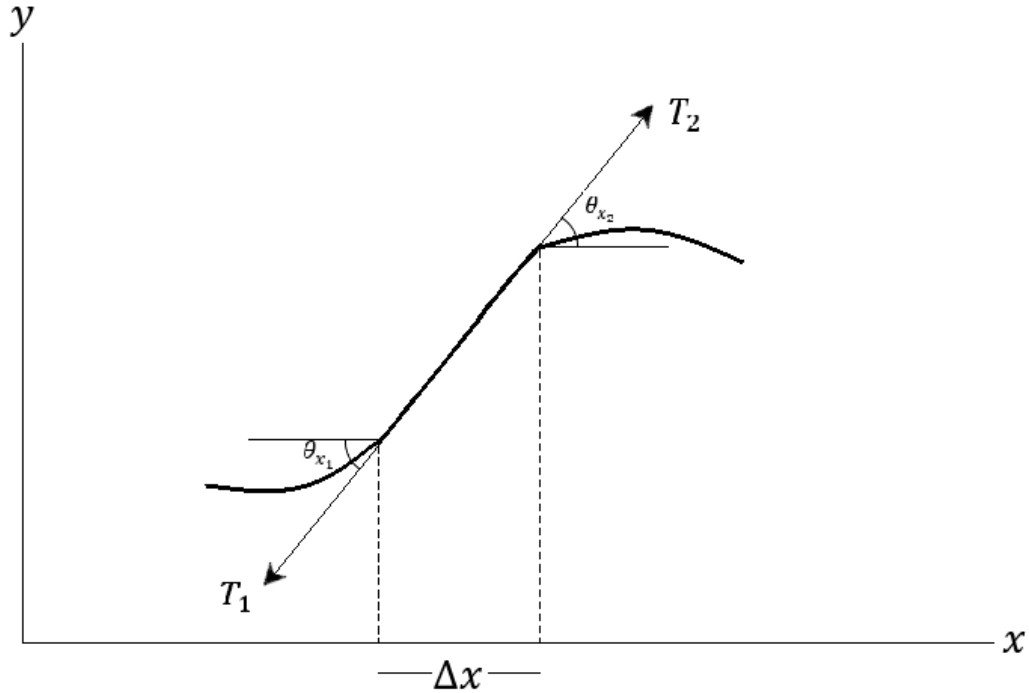
Consideremos uma corda com suas coordenadas explicitadas, conforme a figura 2.1. Na referente fração de corda selecionada existem duas forças de tensão (T) que mantêm ângulos (θ), atuando sobre uma fração de massa (Δm) (ver figura 2.2) (RESNICK; HALLIDAY; KRANE, 2007).

Figura 2.1 – Corda.



Fonte: Do autor.

Figura 2.2 - Corda, forças e ângulo.



Fonte: Do autor.

Utilizando a segunda lei de Newton, escrevemos duas equações, uma para a coordenada (x) e outra para (y), respectivamente:

$$\Delta m \ a_x = F_x = T_2 \cos(\theta_{x_2}) - T_1 \cos(\theta_{x_1}) \quad (2.1)$$

$$\Delta m \ a_y = F_y = T_2 \sin(\theta_{x_2}) - T_1 \sin(\theta_{x_1}) \quad (2.2)$$

Nesta etapa, é necessário considerar o caso de pequenas oscilações e, se tratando apenas das vibrações transversais, coordenada (y), teremos as seguintes considerações a tomar: $\sin(\theta) \cong \tan(\theta) \cong \theta$, $\cos(\theta) \cong 1$ e $a_x = 0$.

Aplicando as considerações angulares na equação (2.1) concluímos que: $T_1 = T_2 = T$, para facilitar a notação, denota-se apenas T . Da equação 2.2 segue que:

$$T \tan(\theta_{x_2}) - T \tan(\theta_{x_1}) = \Delta m \ a_y = F_y \quad (2.3)$$

Considerando apenas o comprimento definido de corda podemos definir que $\tan(\theta_{x_2}) - \tan(\theta_{x_1}) = \Delta \tan(\theta)$ e que o elemento de massa (Δm) pode ser reescrito com relação a seu comprimento (Δx) e densidade (μ), portanto $\Delta m = \mu \Delta x$. Dessa forma, a equação (2.3) torna-se:

$$T \Delta \tan(\theta) = \mu \Delta x \ a_y \quad (2.4)$$

$$\frac{\Delta \tan(\theta)}{\Delta x} = \frac{\mu}{T} a_y \quad (2.5)$$

Neste caso, a função tangente representa a variação em relação ao ponto de equilíbrio da corda, ou seja, a variação da posição (y) em relação a (x), e a componente de aceleração representa a variação da posição em relação ao tempo. Reescrevendo a equação (2.5).

$$\frac{\Delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\Delta x} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

tomando a definição de derivada quando o elemento de massa (Δx) torna-se muito pequeno na

forma $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ podemos escrever a equação (2.6) como:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.7)$$

Por fim, denotamos $\frac{T}{\mu} = v^2$ para obter a equação de onda unidimensional em sua habitual forma, sendo v a velocidade da onda na corda.

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2.8)$$

2.1.1 Solução para a equação de onda unidimensional

A equação de onda representa uma equação diferencial parcial (EDP), onde a função y e suas derivadas são dependentes de n variáveis, neste caso apenas duas: x e t . Uma das maneiras desta equação ser solucionada é utilizando o método da separação de variáveis. Esta técnica reduz uma EDP de n variáveis independentes em n equações diferenciais ordinárias (EDO). Conforme Fernández (2020), no método da separação de variáveis podemos assumir uma solução como um produto de duas funções, espacial e temporal da forma:

$$y(x, t) = X(x) T(t) \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T(t) \ddot{X}(x) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = X(x) \ddot{T}(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

Substituindo as equações (2.10) em (2.8) e separando as variáveis

$$\frac{1}{v^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \quad (2.11)$$

A equação (2.11), representa uma igualdade na qual o primeiro termo é dependente apenas do (t) e o segundo termo apenas de (x). Isto ocorre quando ambos são constantes (λ). Então podemos trabalhar com duas EDOs separadamente.

$$\ddot{X}(x) = \lambda X(x) \quad (2.12)$$

$$\ddot{T}(t) = v^2 \lambda T(t) \quad (2.13)$$

Para o sistema físico discutido, cujas condições de contorno e condições iniciais podem ser bem definidas, iremos tomar a corda distendida em repouso e fixa nas extremidades, portanto não haverá oscilações nas extremidades, logo $y(0, t) = y(L, t) = 0$ a partir $t = 0$.

$$\begin{cases} y(0, t) = y(L, t) = 0 \\ y(x, 0) = f(x) \\ \dot{y}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Aplicando as condições de contorno na equação (2.9), $y(0, t) = X(0) T(t) = 0$, desta igualdade conclui-se que $X(0) = 0$ ou $T(t) = 0$ ou ambos, entretanto $T(t) = 0$ representa uma solução trivial que deve ser descartada, por consequência $X(0) = 0$. Analogamente, $X(L) = 0$.

As conclusões feitas no parágrafo anteriormente nos levam a tratar a equação (2.12) como um problema de contorno na seguinte forma:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

definindo $\lambda = k^2$, a equação (2.15) possui solução da forma:

$$X(x) = C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) \quad (2.16)$$

na qual, aplicando as condições de contorno expressas na (2.15) e desconsiderando a solução trivial obtemos:

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.17)$$

analogamente solucionando a equação (2.13) com $\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$:

$$T(t) = D_1 \cos\left(\frac{vn\pi}{L} t\right) + D_2 \sin\left(\frac{vn\pi}{L} t\right) \quad (2.18)$$

Por fim a equação (2.9) se torna:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{vn\pi}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{vn\pi}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.19)$$

Utilizando as condições iniciais para determinar as constantes na equação (2.19) obtemos que:

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.20)$$

onde a equação (2.20) representa parte da série de Fourier, na qual a constante A_n é definida como:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.21)$$

Para a segunda condição inicial com respeito à velocidade inicial obtemos que:

$$\dot{y}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-A_n \frac{vn\pi}{L} \sin\left(\frac{vn\pi}{L} t\right) + B_n \frac{vn\pi}{L} \cos\left(\frac{vn\pi}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.22)$$

$$\dot{y}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \frac{vn\pi}{L} \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = 0 \quad (2.23)$$

$$B_n = 0 \quad (2.24)$$

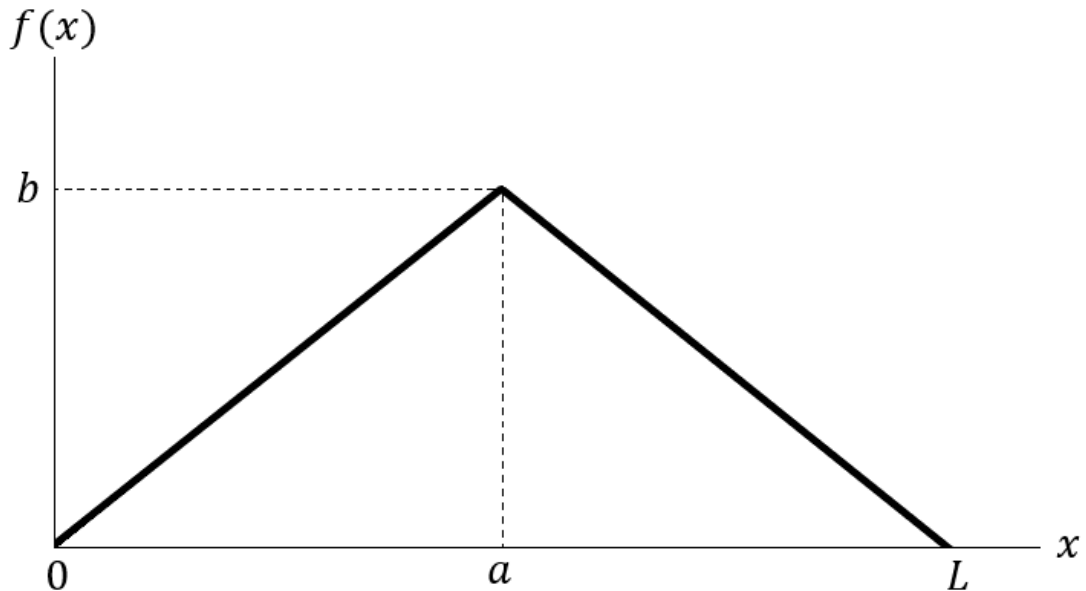
Por fim, a solução para a equação de onda unidimensional, equação (2.19), se resume à:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{v n \pi}{L} t\right) \right] \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad (2.25)$$

2.1.2 Aplicação em onda em instrumentos de cordas dedilhadas:

Nos instrumentos musicais de cordas dedilhadas, que possuem as extremidades dessas cordas praticamente fixas, a oscilação é iniciada a partir da aplicação de uma força transversal a um ponto qualquer da corda. Tal deslocamento pode ser aproximado à formação de uma onda triangular (ver figura 2.3).

Figura 2.3 - Corda, condições iniciais.



Fonte: PEDROZO, FREITAS, 2022, p. 3. Adaptada

Conforme Pedroso e Freitas (2022), considera-se uma corda distendida e fixa nas extremidades $0 \leq x \leq L$, realizado o deslocamento da posição de equilíbrio num ponto "a" até uma altura "b". Utiliza-se a equação (2.21) e os deslocamentos expressos na figura 2.3 para resolução da equação (2.25).

Da equação (2.21) a função $f(x)$ representa a equação das retas anterior e posterior ao ponto deslocado, denotados respectivamente por $f_1(x)$, $0 \leq x \leq a$ e $f_2(x)$, $a \leq x \leq L$, dessa forma reescrevemos a equação (2.21) da seguinte forma:

$$A_n = \frac{2}{L} \left[\int_0^a f_1(x) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx + \int_a^L f_2(x) \sin\left(\frac{n \pi x}{L}\right) dx \right] \quad (2.26)$$

Por simplicidade a solução da equação (2.26), será feita separadamente com relação à reta anterior e à reta posterior ao ponto "a". As funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são determinadas através da equação da reta $f(x) = mx + n$.

Para determinar $f_1(x)$ utilizam-se as condições de $f_1(0) = 0$ e $f_1(a) = b$, portanto $n = 0$ e $f_1(x) = \frac{b}{a}x$. Substituindo o valor $f_1(x) = \frac{b}{a}x$, a resolução da primeira integral será:

$$\begin{aligned} & \int_0^a \frac{b}{a}x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{b}{a} \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{bL}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Analogamente utilizamos as condições de $f_2(a) = b$ e $f_2(0) = L$ para determinar que $f_2(x) = \frac{b}{a-L}(x-L)$. Substituindo o valor $f_2(x) = \frac{b}{a-L}(x-L)$, a resolução da segunda integral será:

$$\begin{aligned} & \int_a^L \frac{b}{a-L}(x-L) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{b}{a-L} \left[\int_a^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \int_a^L L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\ &= \frac{b}{a-L} \left\{ \frac{La}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \left(\frac{L}{n\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) - \frac{L^2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \right\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde o resultado de A_n , na equação (2.26) é a soma das equações (2.27) e (2.28), que resulta em

$$A_n = -\frac{2}{L} \frac{bL^3}{a(a-L)(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \quad (2.29)$$

Por fim, a solução para a equação de onda unidimensional, equação (2.25), dadas as condições iniciais propostas no item 2.1.2, com o termo A_n substituído se resume à:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2bL^2}{a(L-a)(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.30)$$

Nota-se que a equação (2.30) passa a ser composta por três partes: termo temporal, espacial e de amplitude. O termo temporal, $\cos\left(\frac{vn\pi}{L}t\right)$ apresenta as oscilações no decorrer do tempo e está relacionado à frequência angular e à fase inicial de oscilação.

Para o termo espacial, $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ está relacionado aos modos de vibração da corda, na geração dos nós e ventres. Na situação que $\left(\frac{nx}{L}\right)$ for um número inteiro, a função seno sempre se anula e neste caso estão descritos os nós. Nas situações opostas quando $\left(\frac{nx}{L}\right)$ não for um número inteiro, a função seno não se anula e serão representados os ventres.

O termo de amplitude A_n sempre vem acompanhado das funções trigonométricas temporais e espaciais, por esse motivo a amplitude sempre muda a cada instante e ponto do

espaço. É notável que a amplitude depende imediatamente de fatores iniciais como: o comprimento da corda L , o ponto deslocado a , a altura b e uma razão de $\frac{1}{n^2}$. Tal termo está relacionado ao número do harmônico, de maneira que, conforme o decorrer do tempo, maior será o valor de n , mas menor será a amplitude de oscilação.

3 MODOS DE VIBRAÇÃO EM CORDAS

Considerando o fato de que os graus de liberdade de um sistema se relacionam com o número de coordenadas necessárias para descrever a dinâmica das massas, para um sistema contínuo, no qual infinitos elementos infinitesimais de massa podem ser identificados, o deslocamento das massas define os diferentes comportamentos do sistema. Tal complexidade pode ser reduzida tomando a superposição de movimentos mais simples, definidos como modos normais, que possuem dinâmicas oscilatórias e podem ser descritos como um oscilador harmônico simples. Portanto, quando o sistema vibra em um de seus modos, toda a estrutura apresenta a mesma dependência temporal, frequência e constante de fase.

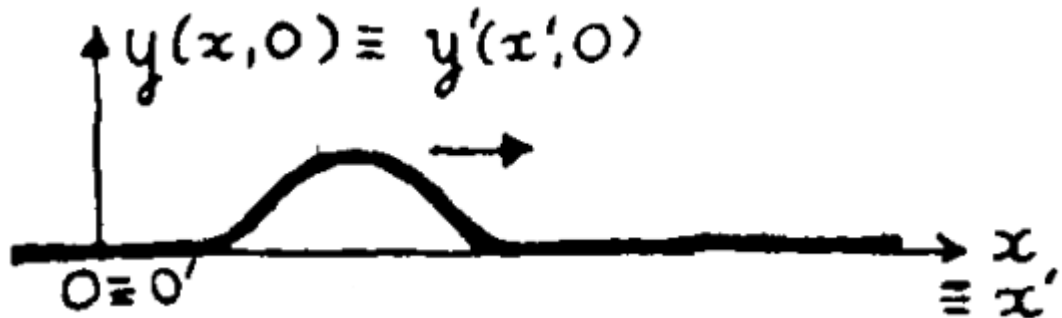
Portanto, conforme aponta Henrique (2002), dado um sistema contínuo que oscile livremente, as vibrações decorrem de maneira que lhe é natural, dependente das características físicas deste sistema, como: massa, elasticidade e amortecimento. Neste contexto, os modos normais representam a forma como a estrutura vibra a partir da composição da dinâmica das massas, podendo ser definidos baseando-se nas ondas estacionárias.

Como foi visto no início do capítulo 2, as cordas dedilhadas estão sujeitas a quatro movimentos oscilatórios. Com isso, nesta etapa iremos calcular a frequência dos modos normais de vibração e investigar quais das características do sistema são relevantes para cada uma das quatro vibrações: transversal, longitudinal, torcional e de oitava.

3.1 Onda transversal

Conforme Nussenzveig (1996), tomaremos a representação de um sistema contínuo como uma corda de comprimento L fixa numa das extremidades. Iniciaremos um pulso cujo deslocamento das massas ocorre na direção y e a propagação do pulso na direção x com velocidade v em relação ao referencial O , (ver figura 3.1). Logo, para descrever a forma de onda buscamos uma equação do tipo $y(x, t)$.

Figura 3.1 - Onda no referencial "O".

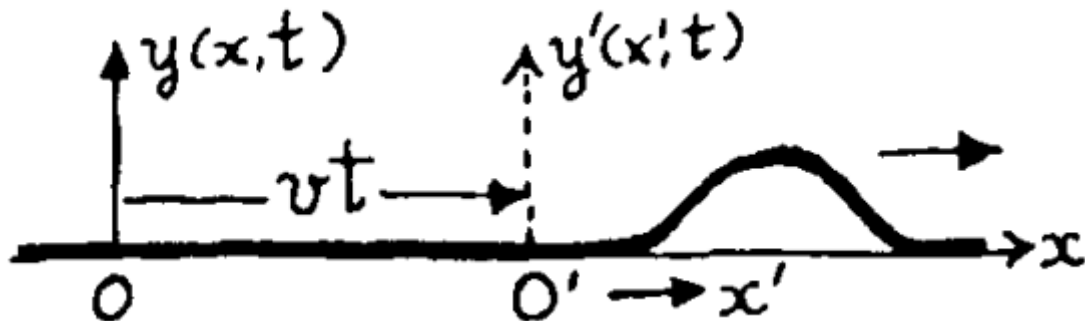


Fonte: NUSSENZVEIG, 1996, p. 99.

Se acompanharmos o desenvolvimento da onda num referencial deslocado de coordenadas O' , x' e y' , coincidente a O em $t = 0$, (ver figura 3.2) o perfil da onda permanece constante no tempo, ou seja, o deslocamento transversal da onda não muda, isto significa que:

$$y'(x', 0) = y'(x', t) = f(x') \quad (3.1)$$

Figura 3.2 – Onda no referencial "O'".



Fonte: NUSSENZVEIG, 1996, p 99.

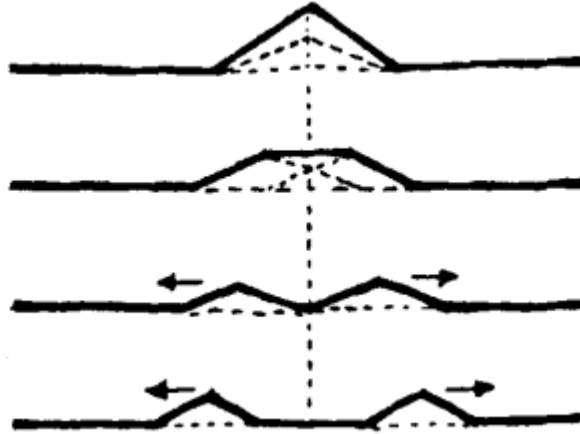
de maneira que a relação entre os dois referenciais é dada por uma transformada de Galileu, em que $x' = x - vt$.

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad (3.2)$$

A equação (3.2) retrata uma onda progressiva que se propaga para a direita. Entretanto, quando ambas as extremidades da corda são fixas a onda deve ser gerada a partir de um ponto qualquer, o que resulta em duas ondas progressivas, sendo uma para esquerda e outra para direita (figura 3.3). Assim, a corda pode comportar ondas progredindo em ambos os sentidos. A equação (3.2) pode ser reescrita como:

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (3.3)$$

Figura 3.3 – Onda no ponto médio da corda.



Fonte: NUSSENZVEIG, 1996, p. 106

Dado um deslocamento em $t = 0$, tomemos a equação (3.3), $y(x, 0) = f(x) + g(x) = y_0(x)$ utilizando a derivada temporal da equação (3.3) para $t = 0$, segue que:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -v \frac{df(x, t)}{dt} + v \frac{dg(x, t)}{dt} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = -v \frac{df(x)}{dt} + v \frac{dg(x)}{dt} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dx} [g(x) - f(x)] = 0 \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é satisfeita se $g(x) = f(x)$, logo

$$y(x, 0) = 2f(x) = y_0(x) \quad (3.7)$$

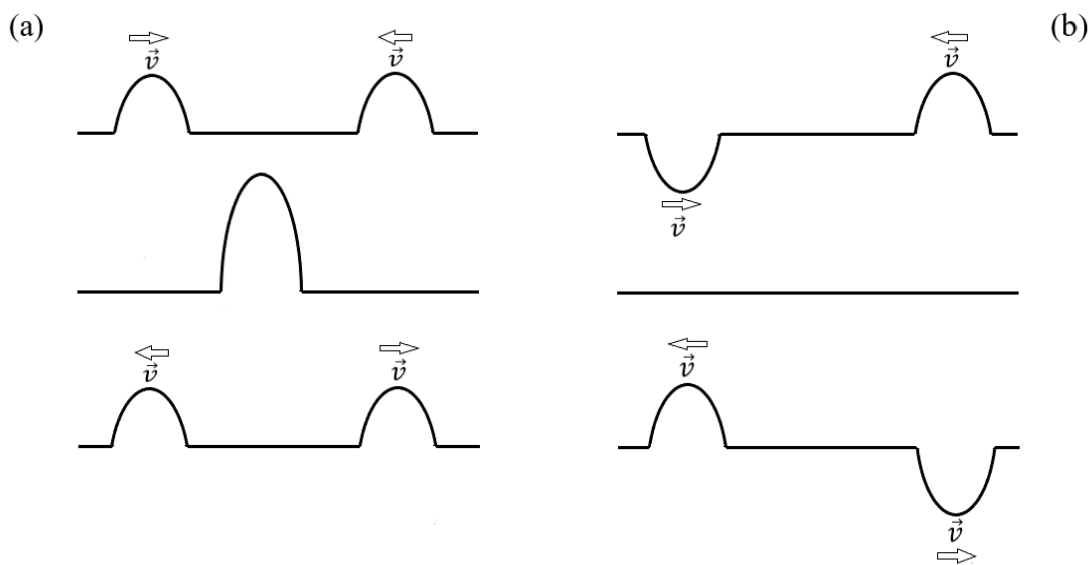
$$y(x, t) = \frac{1}{2} [y_0(x - vt) + y_0(x + vt)] \quad (3.8)$$

Com a equação (3.8) pode-se observar que uma onda gerada na corda se decompõe em duas ondas idênticas que possuem metade da amplitude original com a mesma velocidade, mas propagando-se em sentidos opostos.

Sendo assim, sabemos que a equação (3.3) expressa a propagação de duas ondas numa corda, onde cada onda é representada pelas funções $f(x - vt)$ e $g(x + vt)$, cuja soma algébrica das funções representa o princípio da superposição, situação em que duas ondas irão interagir somando suas amplitudes. Na condição das ondas que estão em interação possuírem a mesma

fase inicial, os picos e vales das ondas estão alinhados ocorrendo o deslocamento máximo da onda resultante. Ou seja, a amplitude da onda resultante é igual a soma das amplitudes das duas ondas, (ver figura 3.4 (a)). Inversamente, caso as ondas interagentes possuam defasagem total nas fases iniciais, o pico de uma das ondas se alinha com o vale da outra onda, ocorrendo o deslocamento mínimo da onda resultante, (ver figura 3.4 (b)), de maneira que a interação descrita representa o fenômeno de interferência das ondas.

Figura 3.4 – Interferência das ondas.



Fonte: Do autor.

A partir do fenômeno de interferência, vamos supor duas ondas cossenoidais em sentidos opostos:

$$y_1(x, t) = f(x - vt) = A \cos(kx - wt + \delta) \quad (3.9)$$

$$y_2(x, t) = g(x + vt) = A \cos(kx + wt + \delta) \quad (3.10)$$

sendo que os parâmetros representam: A amplitude da onda, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ o número de ondas, $w = kv$ a frequência angular de oscilação e δ a fase inicial. Como a equação (3.3) pode ser descrita pela composição de duas ondas em sentidos opostos podemos utilizar as equações (3.9) e (3.10) para reescrever a equação (3.3). Supondo a mesma amplitude e constante de fase nula, a equação (3.3) segue da seguinte forma:

$$y(x, t) = A \cos(kx - wt) + A \cos(kx + wt) \quad (3.11)$$

$$y(x, t) = 2A(x) \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (3.12)$$

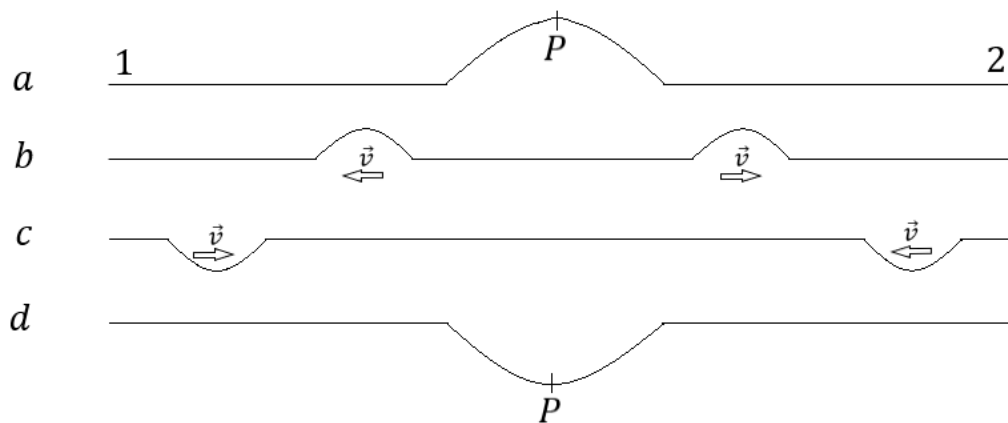
A equação (3.12) representa uma onda estacionária, caso em que não há propagação da onda na direção x , apenas variação da amplitude de acordo com a posição, tal amplitude será definida pelo termo $2A(x) \cos(kx)$.

3.1.1 Cálculo dos modos normais

Para encontrarmos os modos normais de um sistema, será considerada a mesma corda já mencionada, mas desta vez fixa nas duas extremidades. Na condição de o sistema oscilar segundo um de seus modos normais, toda a corda oscila na mesma frequência angular ω e constante de fase δ . Ao excitarmos um ponto P médio da corda, (ver figura 3.5), serão geradas duas ondas progressivas idênticas apenas em sentidos opostos que são refletidas nas extremidades 1 e 2. Este movimento foi visto anteriormente no tópico 3.1 e sabemos que resulta numa onda estacionária que é dada pelo produto de uma função de x por uma função de t . Neste contexto conforme Nussenzveig (1996) podemos expressar uma onda estacionária como:

$$y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \delta) \quad (3.13)$$

Figura 3.5 – Ondas progressivas no ponto médio.



Fonte: Do autor.

Conforme Nussenzveig (1996), a equação (3.13) deve ser solução para a equação de onda unidimensional portanto, tomando as derivadas da equação (3.13):

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (3.14)$$

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} \cos(\omega t + \delta) = -\frac{\omega^2}{v^2} A(x) \cos(\omega t + \delta) \quad (3.15)$$

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + k^2 A(x) = 0 \quad (3.16)$$

Na equação (3.16) tomou-se $k = \frac{\omega^2}{v^2}$ e possui solução do tipo:

$$A(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx) \quad (3.17)$$

Como ambas as extremidades estão fixas, as condições de contorno se apresentam na equação (3.13) como: $y(0, t) = y(L, t) = 0$. Utilizando estas condições na equação (3.17), observamos que $A(0) = A(L) = 0$. Se desconsiderarmos a solução trivial em que $a = b = 0$, podemos obter que para $A(0)$:

$$A(0) = a \cos(k0) + b \sin(k0) = 0 \quad (3.18)$$

$$a = 0$$

Portanto, podemos reescrever a equação (3.17) como:

$$A(x) = b \sin(kx) \quad (3.19)$$

utilizando a segunda condição de contorno $A(L)$

$$A(L) = b \sin(kL) = 0 \quad (3.20)$$

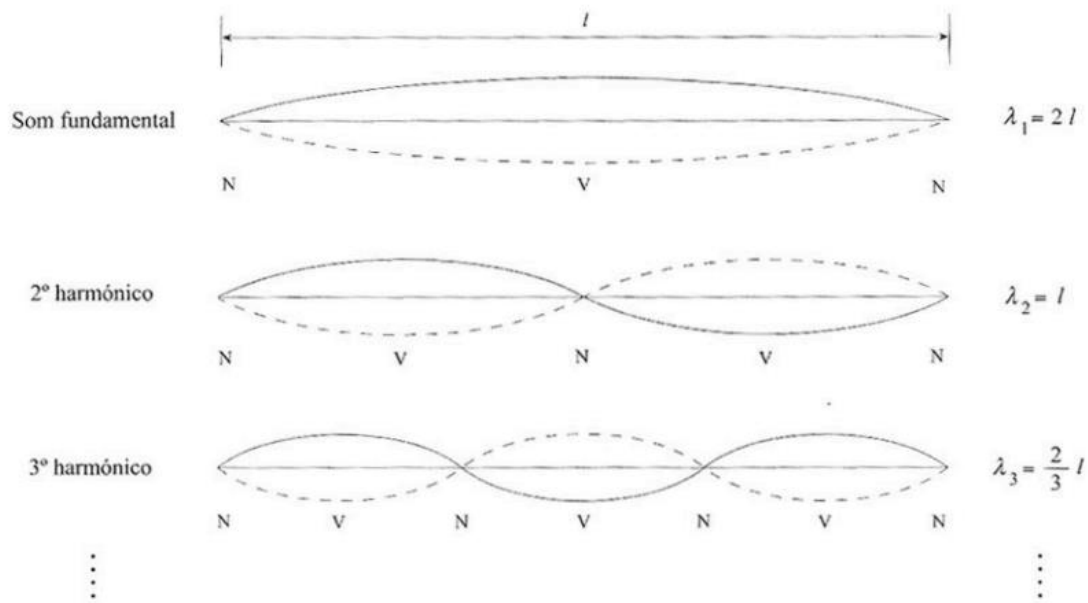
Portanto para $b \neq 0$, $\sin(kL) = 0$, logo $k_n = \frac{n\pi}{L}$, sendo $n = 1, 2, 3 \dots$ substituindo estes resultados na equação (3.13)

$$y(x, t) = b_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (3.21)$$

Lembrando que $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$, podemos concluir que o comprimento de onda associado a cada modo normal, (figura 3.6) seja:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (3.22)$$

Figura 3.6 – Modos vibratórios transversais.



Fonte: HENRIQUE, 2002, p. 160.

Utilizando $w_n = 2\pi f_n$ e lembrando que $w_n = k_n v$ podemos escrever a frequência do modo de oscilação n , onde a velocidade v para uma onda transversal é dada por $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, visto no item 2.1.

$$f_n = n \frac{v}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (3.23)$$

Analisando as equações (3.22) e (3.23), nota-se que tanto o comprimento de onda λ_n quanto as frequências f_n admitidas pela corda são múltiplos de grandezas pré-estabelecidas como: comprimento, tensão e massa. Além disso, podemos observar que a corda só pode vibrar com frequências resultantes da equação (3.23) por consequência, caso a corda fosse agitada com frequência diferente dos valores possíveis à equação (3.23), a corda não entraria em vibração, ou seja, não haveria ondas percorrendo a corda.

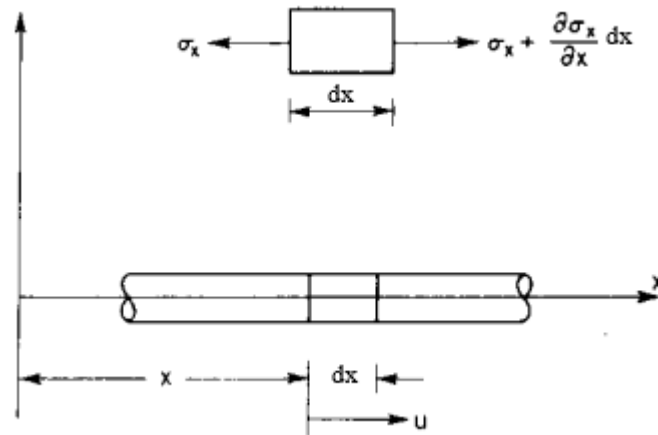
Nestas condições, obtemos diferentes modos normais de vibração para cada valor de n , sendo que para qualquer valor de n ocorrem pontos estáticos na corda, (ver figura 3.6). Tais pontos são chamados de nós, resultantes da superposição da onda incidente e refletida. Nos nós haverá a interferência destrutiva, por isso são pontos fixos, sem oscilação na corda. Já as regiões de oscilação são chamadas de ventres, resultado da interferência construtiva. Por esta razão a corda apresenta um aspecto estacionário e esta onda qualifica-se estacionária, na qual o primeiro

modo de vibração é denominado fundamental, seguido dos próximos modos: o primeiro harmônico, segundo harmônico, terceiro harmônico etc. (Tavares et al., 1989).

3.2 Onda longitudinal

Consideremos um segmento de corda com as seguintes especificações: seção transversal de área A , módulo de Young E , comprimento L e densidade de massa ρ . Assumimos uma tensão σ_x gerando-se uma vibração longitudinal onde elementos infinitesimais dx sofrem deslocamento (u) na direção x (figura 3.7) (RICHART; HALL; WOODS, 1970).

Figura 3.7 - Vibração longitudinal.



Fonte: RICHART, HALL, WOODS, 1970, p. 61 Adaptada.

A equação de movimento pode ser escrita como:

$$F = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) A - \sigma_x A \quad (3.24)$$

pela segunda lei de Newton

$$\sigma_x A - \sigma_x A + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx A = dx A \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.26)$$

O módulo de Young é dado pela razão entre a tensão σ_x e a deformação $\frac{\partial u}{\partial x}$, portanto podemos escrever que:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.28)$$

igualando a equação (3.26) a (3.28)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.29)$$

em que a razão $\frac{E}{\rho}$ representa a velocidade de propagação da onda longitudinal. Podemos então tomar $v^2 = \frac{E}{\rho}$ e reescrever a equação (3.29) como a equação de onda unidimensional padrão:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.30)$$

A solução geral da equação (3.30) possui a mesma forma da onda transversal que pode ser escrita na forma trigonométrica (RICHART; HALL; WOODS, 1970):

$$u(x, t) = f(vt + x) + g(vt - x) \quad (3.31)$$

$$u(x, t) = A(x)[c \cos(w_n t) + d \sin(w_n t)] \quad (3.32)$$

A equação (3.32) deve ser solução da equação de onda, portanto tomando as derivadas desta equação:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (3.33)$$

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + k^2 A(x) = 0 \quad (3.34)$$

na equação (3.34) tomou-se $k^2 = \frac{w_n^2}{v^2}$ e possui solução do tipo:

$$A(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx) \quad (3.35)$$

Utilizando as condições de contorno que ambas as extremidades são fixas $u(0, t) = u(L, t) = 0$, analogamente às ondas transversais obtemos que $k_n = \frac{n\pi}{L}$ a equação (3.32) pode ser escrita como:

$$u(x, t) = c_2 \sin(k_n x) [c \cos(w_n t) + d \sin(w_n t)] \quad (3.36)$$

Neste contexto, utilizando que $w_n = 2\pi f_n$ e lembrando que $w_n = k_n v$ podemos escrever a frequência do modo de oscilação n , onde a velocidade v para uma onda longitudinal é dada por $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

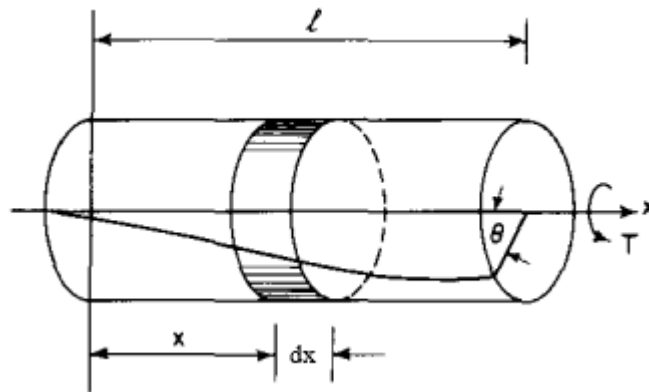
$$f_n = n \frac{v}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.37)$$

As vibrações longitudinais decorrem diretamente da vibração transversal na corda. Dada a elasticidade do material, ao excitarmos a corda transversalmente ela estica e aumenta de comprimento, surgindo assim as vibrações longitudinais. Interessante notar que a frequência dos modos de vibração longitudinais não depende da força de tensão inicial, por esta razão, independente da tensão aplicada o som emitido por esta vibração praticamente não se altera (HENRIQUE, 2002).

3.3 Onda torcional

Consideremos uma corda finita de comprimento l cuja seção transversal infinitesimal dx é submetida a uma torção (figura 3.8), que gera um ângulo de rotação θ .

Figura 3.8 - Vibração torcional.



Fonte: RICHART, HALL, WOODS, 1970, p. 65. Adaptada.

O torque T agente na seção transversal infinitesimal pode ser escrito como (RICHART, HALL, WOODS, 1970):

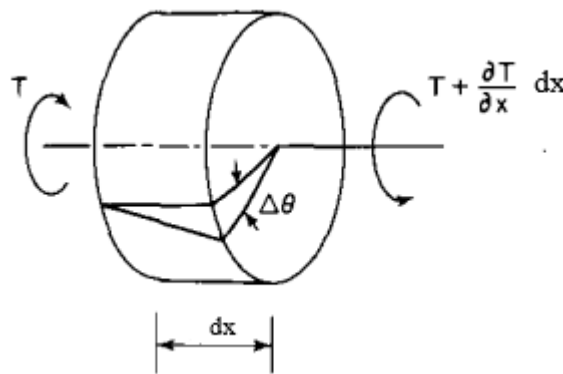
$$T = I_p G \frac{d\theta}{dx} \quad (3.38)$$

em que I_p representa o momento polar de inércia da seção transversal, G o módulo de cisalhamento (modulo de rigidez) e $\frac{d\theta}{dx}$ o ângulo de torção por comprimento.

O torque devido à inércia rotacional de um elemento dx (figura 3.9), pode ser escrito como:

$$T = \rho I_p dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (3.39)$$

Figura 3.9 - Elemento infinitesimal da corda.



Fonte: RICHART, HALL, WOODS, 1970, p. 65.

Pela segunda lei de Newton

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T = \rho I_p dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (3.41)$$

Substituindo o valor T da equação (3.38) na equação (3.41).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(I_p G \frac{d\theta}{dx} \right) = \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (3.43)$$

em que v^2 representa a velocidade de propagação da onda de torção, com $v^2 = \frac{G}{\rho}$. Podemos manter as condições de contorno das ondas longitudinais onde sabemos que as extremidades da corda são fixas. Assim, podemos utilizar a mesma solução trigonométrica (equação (3.32)) de modo que obteremos a frequência dos modos normais de vibração de torção como:

$$f_n = n \frac{v}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3.44)$$

3.4 Vibrações de oitava

A vibração de oitava não ocorre diretamente na corda como as outras vibrações trabalhadas até o momento, mas advém dos pontos de fixação da corda que a rigor não são completamente rígidos. De maneira que, ao tempo de a vibração transversal efetuar um ciclo, os pontos de fixação efetuam dois ciclos (HENRIQUE, 2002).

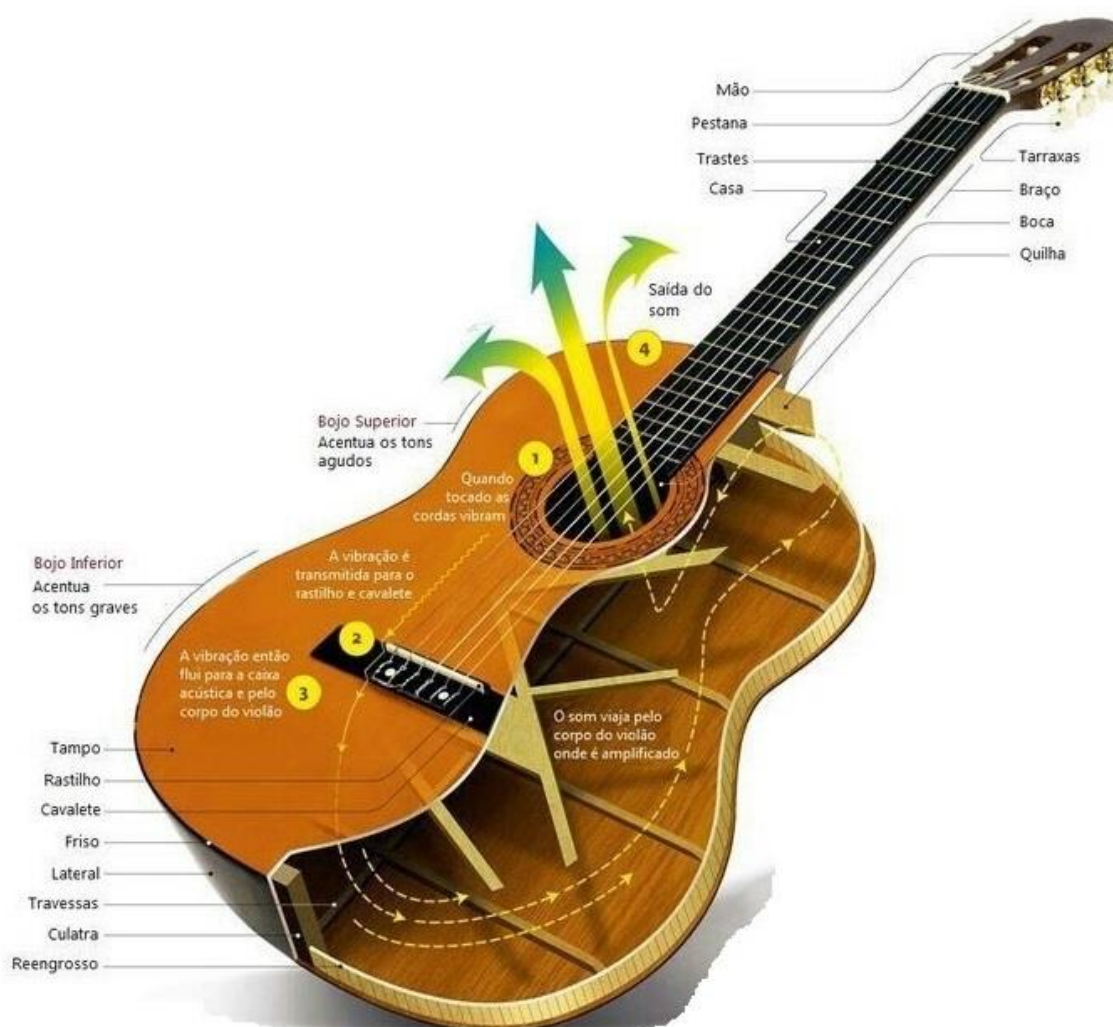
Apesar desta vibração sempre estar presente, ela pode ser minimizada conforme os pontos de fixação da corda se mostram mais rígidos. Neste caso, como estamos trabalhando com pontos de fixação totalmente rígidos podemos desconsiderar esta vibração.

4 ESTRUTURA DO VIOLÃO E DA VIOLA CAIPIRA

Para entendermos os fatores que influenciam os modos normais de vibração e os amortecimentos ligados à estrutura do sistema, faz-se necessário o estudo das componentes dos instrumentos escolhidos. A semelhança entre o violão e a viola caipira não é apenas externa, estes instrumentos possuem os mesmos componentes estruturais, sendo que a única diferença está nas cordas. Enquanto o violão possui seis, que geralmente são de nylon, a viola caipira possui dez cordas de aço que são arranjadas em duplas da seguinte forma: as duas primeiras duplas de corda são uníssonas, enquanto a 3ª, 4ª e 5ª dupla são oitavadas, isto é, ao soarmos uma nota musical nesta dupla de cordas estamos também soando o dobro de sua frequência.

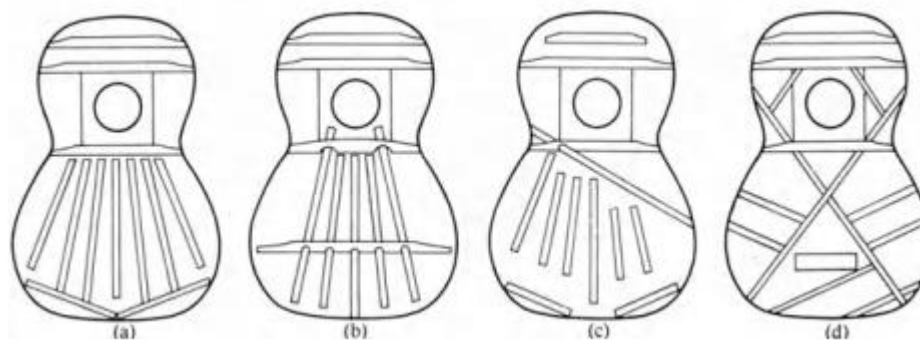
As principais componentes estruturais destes instrumentos são: corda, pestana, traste, rastilho, cavalete, tampo superior (ou harmônico), tampo inferior (ou fundo) e as travessas, esses e outros componentes que podem ser vistos na figura 4.1. A configuração das travessas é um dos principais aspectos para a qualidade sonora do instrumento, podendo variar as configurações de acordo com o desejado pelo luthier, como é chamado o fabricante (figura 4.2).

Figura 4.1 – Estrutura do violão.



Fonte: conservatório musical de vila velha.

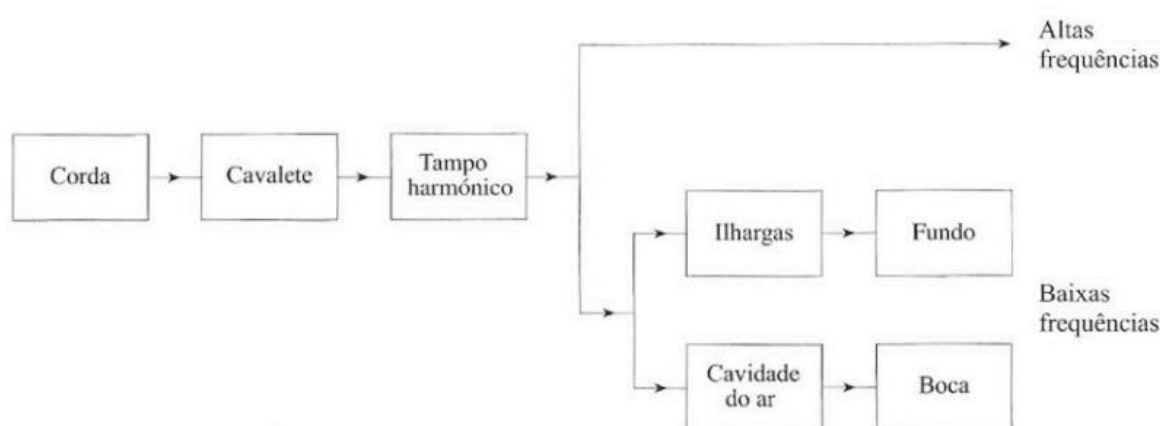
Figura 4.2 - Formatos das travessas.



Fonte: FLETCHER e ROSSING, 1991, p. 208.

Ao excitarmos a corda destes instrumentos, suas vibrações se irradiam para o cavalete e o tampo superior e em seguida para a lateral e tampo inferior. Com a vibração destas partes, o ar interno na caixa acústica é agitado e o som é transmitido pela boca do instrumento. Dependendo da frequência vibratória alguns componentes estruturais podem se excitar mais do que outros (figura 4.3). Nas altas frequências a maior parte do som irradiado deriva da vibração do tampo superior, para baixas frequências ocorre maior distribuição das vibrações e todas as partes participam de maneira mais igualitária (FLETCHER e ROSSING, 1991).

Figura 4.3 – Diagrama da radiação sonora em relação às frequências.



Fonte: HENRIQUE, 2022, p. 406.

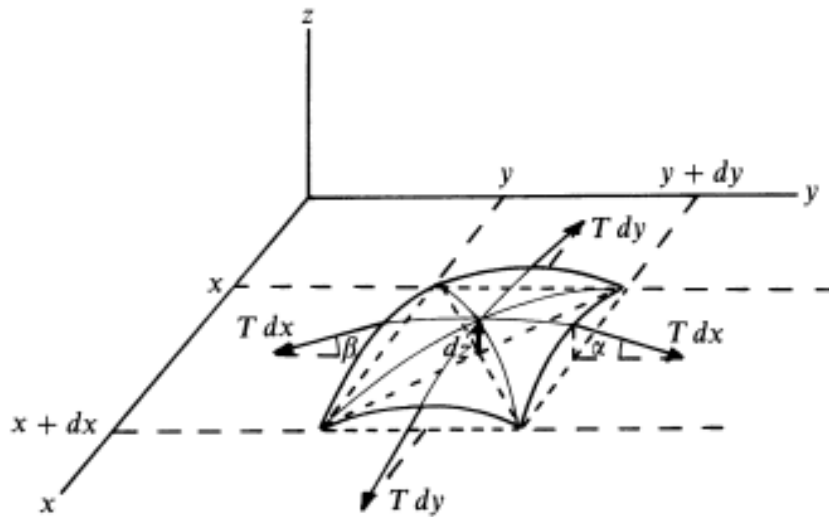
Se considerarmos as baixas frequências, segundo Paiva (2017) os primeiros modos vibratórios do violão e da viola caipira são similares. No contexto das baixas frequências, Fletcher e Rossing (1991) afirmam que os modos de vibração do tampo superior são semelhantes aos de uma placa retangular. Por consequência das similaridades citadas, tomaremos a demonstração dos modos normais de vibração a partir de uma placa retangular, de modo que tal demonstração é válida para ambos os instrumentos.

4.1 Dedução da equação de onda bidimensional

Conforme Fletcher e Rossing (1991), consideremos um elemento bidimensional com densidade de área σ fixado em todas as bordas, sujeito a uma tensão T superficial uniforme e constante que age para restaurar a posição de equilíbrio. A partir de uma vibração é gerada uma distorção em $Z(x, y)$ e podemos escrever as forças agentes no plano (ver figura 4.4).

Considerando as aproximações de pequenas oscilações $\sin(\theta) \cong \tan(\theta) \cong \theta$ as forças horizontais se anulam, com isso precisaremos trabalhar apenas com as forças verticais nas direções x e y .

Figura 4.4 – Plano em duas dimensões.



Fonte: FLETCHER e ROSSING, 1991, p. 66.

$$F_x = T dy \sin(\alpha) - T dy \sin(\beta) \quad (4.1)$$

$$F_x = T dy [\tan(\alpha) - \tan(\beta)] \quad (4.2)$$

A função tangente representa a variação em relação ao ponto de equilíbrio, ou seja, a variação de Z em relação a x .

$$F_x = T dy \left[\left. \frac{\partial Z}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial Z}{\partial x} \right|_x \right] \quad (4.3)$$

Analogamente podemos escrever a força em y na forma:

$$F_y = T dx \left[\left. \frac{\partial Z}{\partial y} \right|_{y+dy} - \left. \frac{\partial Z}{\partial y} \right|_y \right] \quad (4.4)$$

Utilizando a segunda lei de Newton.

$$\sigma dx dy \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = T dy \left[\left. \frac{\partial Z}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial Z}{\partial x} \right|_x \right] + T dx \left[\left. \frac{\partial Z}{\partial y} \right|_{y+dy} - \left. \frac{\partial Z}{\partial y} \right|_y \right] \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \frac{T}{\sigma} \left[\frac{\left[\left. \frac{\partial Z}{\partial x} \right|_{x+dx} - \left. \frac{\partial Z}{\partial x} \right|_x \right]}{dx} + \frac{\left[\left. \frac{\partial Z}{\partial y} \right|_{y+dy} - \left. \frac{\partial Z}{\partial y} \right|_y \right]}{dy} \right] \quad (4.6)$$

Por fim, encontramos a equação de onda bidimensional, tomando $v^2 = \frac{T}{\sigma}$.

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) \quad (4.7)$$

4.1.1 Solução para equação de onda bidimensional

Para esta solução Fletcher e Rossing (1991) utilizam o método da separação de variáveis, onde podemos assumir uma solução da forma:

$$Z(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t) \quad (4.8)$$

Tomando as derivadas da equação (4.8).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = YT\ddot{X} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = XT\ddot{Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = XY\ddot{T} \end{cases} \quad (4.9)$$

Substituindo as equações (4.9) em (4.7).

$$XY\ddot{T} = v^2 [YT\ddot{X} + XT\ddot{Y}] \quad (4.10)$$

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{v^2}{X} \ddot{X} + \frac{v^2}{Y} \ddot{Y} \quad (4.11)$$

A equação (4.11) é verdadeira apenas se ambos os lados forem iguais a uma constante denotada por $-w^2$.

$$\ddot{T} = -w^2 T \quad (4.12)$$

A equação acima possui solução na forma:

$$T(t) = A \sin(wt) + B \cos(wt) \quad (4.13)$$

Retornando a equação (4.11), podemos substituir a mesma constante $-w^2$ no lado esquerdo da igualdade, dessa forma temos que:

$$\frac{\ddot{X}}{X} + \frac{w^2}{v^2} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} \quad (4.14)$$

Novamente ambos os lados devem ser iguais a uma constante denotada por k^2 nos levando a:

$$\ddot{X} + \left(\frac{w^2}{v^2} - k^2\right) X = 0 \quad (4.15)$$

que possui solução da forma:

$$X(x) = C \sin\left(\sqrt{\frac{w^2}{v^2} - k^2} x\right) + D \cos\left(\sqrt{\frac{w^2}{v^2} - k^2} x\right) \quad (4.16)$$

Por fim, para resolvermos a função \ddot{Y} , temos que:

$$\ddot{Y} + k^2 Y = 0 \quad (4.17)$$

$$Y(y) = E \sin(ky) + F \cos(ky) \quad (4.18)$$

Em resumo, a função $Z(x, y, t)$ representa o produto das três soluções encontradas nas equações (4.13), (4.16) e (4.18). Tomando as condições de contorno para uma placa retangular fixa nas extremidades de comprimento L_x e L_y temos que $Z(x, y, t) = 0$ para $x = 0$, $x = L_x$, $y = 0$, $y = L_y$ e $\dot{Z}(x, y, t) = 0$ para $t = 0$.

Aplicando as condições de x na equação (4.16) e desconsiderando as soluções triviais obtemos que $D = 0$ e a equação (4.16) se resume à:

$$X_m(x) = C \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \quad (4.19)$$

$$\text{em que } \frac{m\pi}{L_x} = \sqrt{\frac{w^2}{v^2} - k^2}.$$

Analogamente para a equação (4.18) obtemos que:

$$Y_n(y) = E \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \quad (4.20)$$

$$\text{m que } k = \frac{n\pi}{L_y}.$$

Portanto, podemos reescrever a equação (4.8) como:

$$Z(x, y, t) = C \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) E \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) [A \sin(wt) + B \cos(wt)] \quad (4.21)$$

Como última condição, temos que antes de se iniciar o movimento na placa em $t = 0$ a velocidade do sistema é nula. Portanto, tomando a derivada da equação (4.21).

$$\dot{Z}(x, y, t) = C \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) E \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) [Aw \cos(wt) - Bw \sin(wt)] \quad (4.22)$$

$$\dot{Z}(x, y, 0) = C \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) E \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) [Aw] = 0 \quad (4.23)$$

Portanto $A = 0$. Por fim, podemos aglutinar as constantes e reescrever a equação (4.21) da forma:

$$Z(x, y, t) = G \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \cos(wt) \quad (4.24)$$

A equação anterior representa a solução da equação de onda bidimensional. A partir de $\frac{m\pi}{L_x} = \sqrt{\frac{w^2}{v^2} - k^2}$ podemos encontrar a frequência angular.

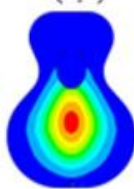
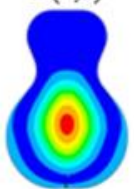
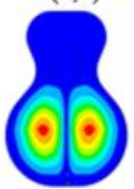
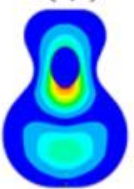
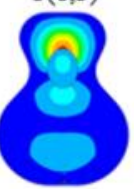
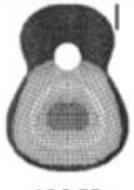
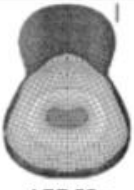
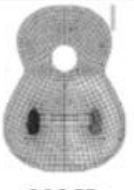


$$w^2 = v^2 \left[\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right] \quad (4.25)$$

Tomando $w = 2\pi f$ podemos encontrar a frequência dos modos normais de vibração, com $m, n = 1, 2, 3 \dots$

$$f_{mn} = \frac{1}{2\pi} v \sqrt{\left(\frac{m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n}{L_y}\right)^2} \quad (4.26)$$

Alguns dos modos normais presentes no tampo harmônico podem ser vistos com a utilização de um interferograma holográfico conforme a figura 4.5, mostrando as regiões de máxima vibração. Certamente as formas modais e frequências dependem das condições de contorno, sendo que estas vibrações foram captadas sem o fundo do violão para podermos obter os modos isolados do tampo harmônico.

Figura 4.5 – Vibrações na estrutura do violão e da viola caipira.

Modos estruturais da viola caipira	 T(1,1) 114.36 Hz	 B(1,1) 157.56 Hz	 T(2,1) 212.76 Hz	 T(1,2) 232.22 Hz	 T(1,3) 262.52 Hz
Modos estruturais do violão	 139 Hz	 177 Hz	 205 Hz	 281 Hz	 325 Hz

Fonte: PAIVA, 2017, p.27. Adaptada

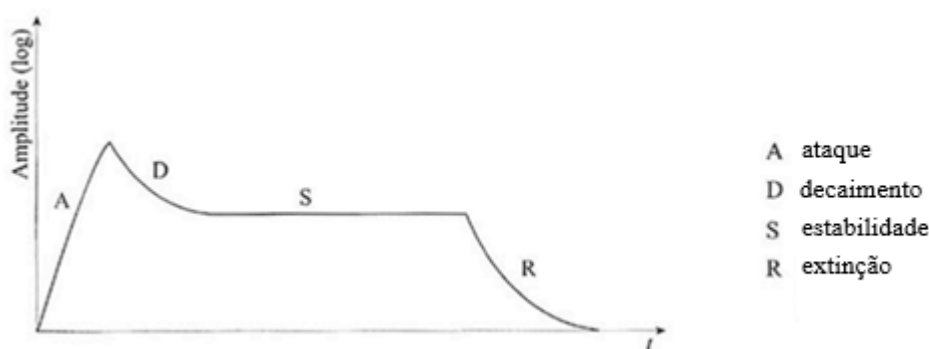
4.2 Timbre

O timbre representa a caracterização sonora de um instrumento musical, sendo o elemento que nos permite distinguir dois sons de uma mesma frequência que tenham sido emitidos por fontes sonoras diferentes. Ou seja, por meio desta qualidade podemos diferenciar dois instrumentos musicais mesmo que estejam produzindo a mesma nota musical. Podemos identificar dois responsáveis que definem o timbre: suas características físicas e o envelope sonoro.

As características físicas de um instrumento definem as ondas que serão produzidas. Ao emitirmos som em um instrumento musical além da frequência fundamental, uma série de ondas senoidais estão sendo geradas e estas ondas representam os harmônicos superiores. A combinação de todas as ondas não mais representa uma senoide, mas sim uma onda irregular com diversas cristas e vales, que definirão o som audível (HENRIQUE, 2002).

Neste contexto, não é apenas a forma de onda que define o timbre produzido pelo instrumento, mas também a forma como o som se inicia, se mantém e termina, surgindo assim, o conceito de envelope sonoro (ver figura 4.6). Tal ideia representa o período de duração sonoro e pode ser dividido em três etapas: ataque, estabilidade e extinção. Entretanto, podem ocorrer variações na duração de cada etapa dependendo da fonte sonora.

Figura 4.6 – Envelope sonoro.



Fonte: HENRIQUE, 2002

Segundo Henrique (2002), o período de ataque corresponde à passagem do silêncio ao ruído, nesta fase existe um ruído sonoro, proveniente de vibrações irregulares da excitação do instrumento. Tais vibrações são responsáveis pela identificação tímbrica do instrumento, de

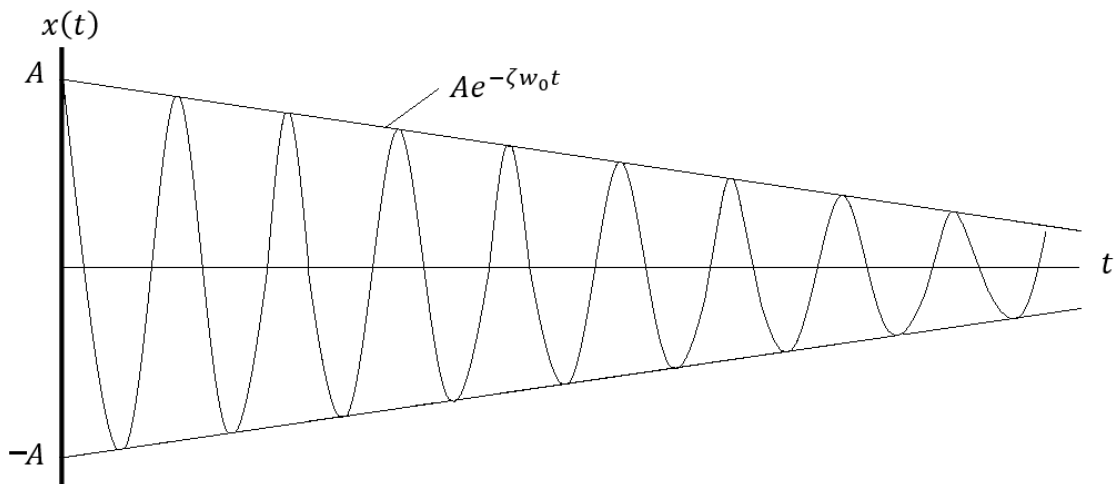
modo que caso fossem desconsideradas, não seria possível identificar o instrumento apenas pela audição. Anterior ao período de estabilidade há um pequeno decaimento, nesta etapa as vibrações mais intensas perdem energia para que o som se estabilize, entretanto esta não é uma etapa comum, podendo não ocorrer em alguns instrumentos musicais. Durante a estabilidade as vibrações irregulares se extinguem e características como altura e intensidade são fixadas, para que posteriormente o som entre no período de extinção, quando as vibrações não conseguem se sustentar devido à perda energética e assim o som se extingue.

5 MÉTODO DO DECREMENTO LOGARÍTMICO

Existem diversos métodos para determinar o nível de amortecimento sobre o qual um sistema está submetido. A escolha do método depende principalmente da faixa do parâmetro de amortecimento, o ζ mostrado no item 1.4, da frequência de vibração e se o método em questão é adequado para o sistema a ser analisado (TEIXEIRA, SILVA, FEITEIRA, 2014).

O método do decremento logarítmico calcula o amortecimento de um sistema ou material a partir das ondas sonoras geradas em consequência de uma excitação livre. A utilização deste método se torna de extrema conveniência na situação em que é possível medir as amplitudes de oscilações geradas acusticamente pela vibração do sistema. Por exemplo, na figura 5.1 podemos ver a resposta de decaimento de um sistema oscilatório subamortecido com um grau de liberdade após sofrer uma excitação livre.

Figura 5.1 - Resposta ao impulso de um sistema subamortecido.



Fonte: Do autor.

A partir da solução para o sistema subamortecido demonstrado no item 1.4, tem-se equação da forma:

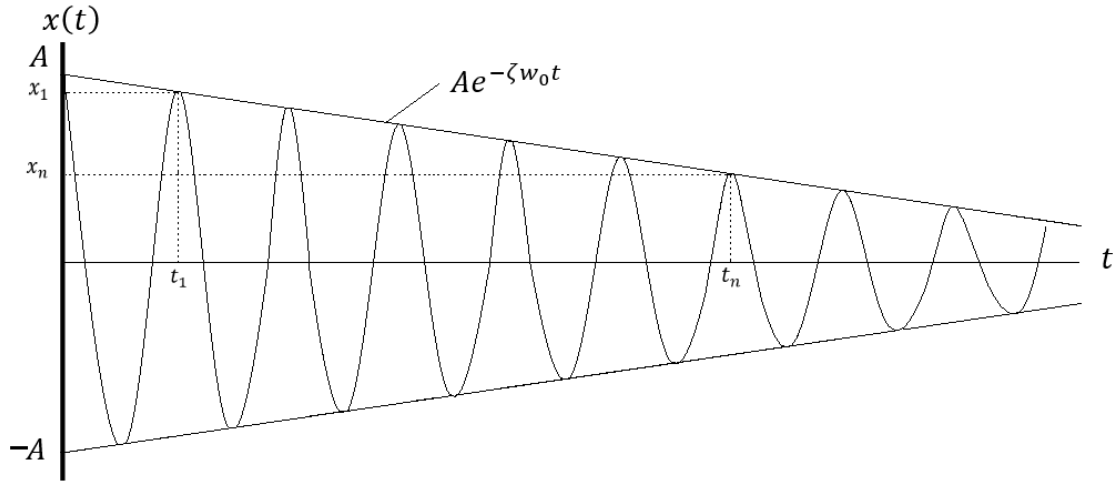
$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_d t + \varphi) \quad (5.1)$$

Trabalhando na equação acima, será considerada a fase inicial nula e fazendo a aproximação para pequenas oscilações a equação (5.1) se reduz a (NICOLETTI):

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_0 t} \quad (5.2)$$

Se considerarmos dois picos quaisquer (ver figura 5.2), pode-se reescrever a equação (5.2) referente a cada amplitude da seguinte forma:

Figura 5.2 – Decaimento das vibrações.



Fonte – Do autor.

$$x_1(t) = Ae^{-\zeta w_0 t_1} \quad (5.3)$$

$$x_n(t) = Ae^{-\zeta w_0 t_n} \quad (5.4)$$

As equações (5.3) e (5.4) representam os valores de amplitude medidas e, dividindo as equações citadas, é dado que:

$$\frac{x_1}{x_n} = \frac{Ae^{-\zeta w_0 t_1}}{Ae^{-\zeta w_0 t_n}} = e^{\zeta w_0 (t_n - t_1)} \quad (5.5)$$

aplicando o logaritmo natural, define-se o decremento logarítmico δ da seguinte forma:

$$\delta = \ln \left(\frac{x_1}{x_n} \right) = \zeta w_0 (t_n - t_1) \quad (5.6)$$

que deve ser generalizada na forma:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_1}{x_n} \right) = \zeta w_0 (\Delta t) \quad (5.7)$$

de forma que:

- n : número de vales entre as duas amplitudes escolhidas.
- Δt : período de amortecimento.

O período de amortecimento Δt é definido como:

$$\Delta t = T_d = \frac{2\pi}{w_d} = \frac{t_n - t_1}{n} \quad (5.8)$$

substituindo a equação (5.8) na (5.7) e considerando o fator $w_d = w_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$

$$\delta = \zeta \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (5.9)$$

finalmente, isolando ζ na equação (5.9) tem-se o fator de amortecimento do sistema.

$$\zeta = \sqrt{\frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (5.10)$$

Deve ser frisado que para os cálculos de demonstração sobre o decremento logarítmico foi utilizado o modelo de amortecimento viscoelástico visto no item 1.1.1, mas não desconsidera os amortecimentos estrutural e interno, pois um sistema não pode ser desvinculado das diversas formas de amortecimento que o influenciam. Ou seja, o decaimento das oscilações de um sistema pelo modelo de amortecimento viscoelástico (figura 5.2) sofre influência dos amortecimentos já mencionados, visto que são inerentes ao sistema e sempre influenciarão as oscilações. Desta forma, o fator de amortecimento ζ mostrado na equação (5.10) engloba todas as possibilidades de dispersão energética agindo sobre o sistema.

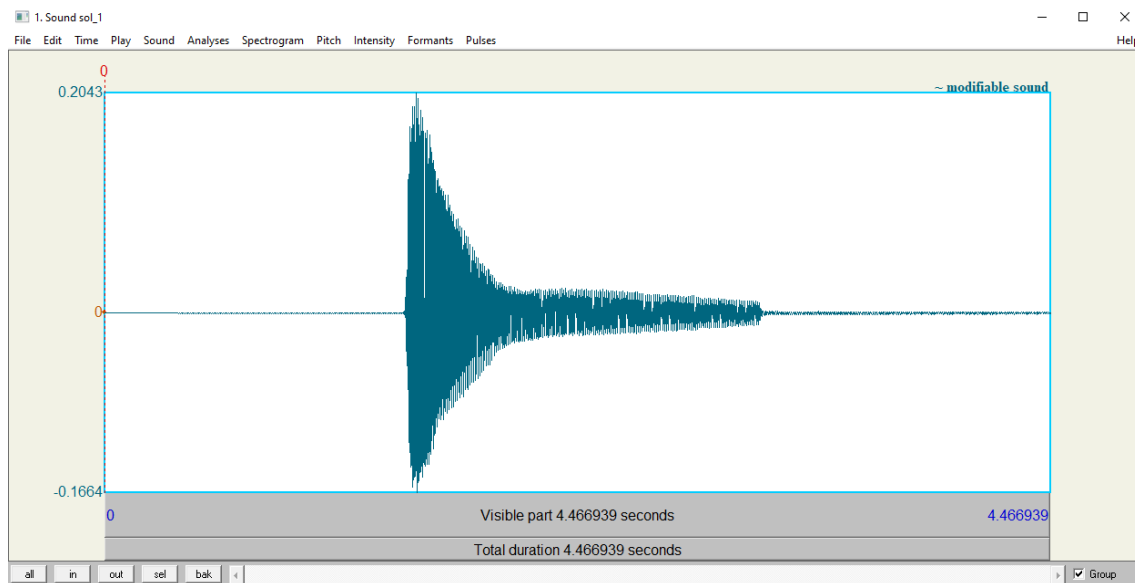
6 EXPERIMENTO

6.1 Descrição do experimento

Este experimento tem como objetivo medir o do coeficiente de amortecimento do violão e da viola caipira, utilizando o método do decremento logarítmico. Para isto o experimento será dividido em duas fases: durante a primeira fase realizamos a execução das notas reais da afinação do violão e da viola caipira, onde tais notas musicais foram gravadas em arquivos de áudio para que durante a segunda fase fossem trabalhadas no domínio do tempo e da frequência. Sendo o violão utilizado neste trabalho confeccionado pelo luthier Jó Nunes, modelo Luiza 2011 que possui as notas reais iniciadas na nota Mi 1 e finalizadas em Si 4 da escala europeia. Já a viola caipira foi fabricada pela marca Rozini, modelo Caipira 2015, que tem suas notas reais iniciadas em Si 1 e terminadas em Si 4.

As notas excitadas nos instrumentos foram produzidas separadamente a partir do dedilhado transversal das cordas, sendo permitido que as notas soassem sem interrupção em vibração livre até a extinção natural do som. Todas as notas musicais foram gravadas como arquivos digitais .wav por meio do programa de computador *Praat*, (ver figura 6.1) e depois transferidas ao software *Matlab* para serem processadas e analisadas.

Figura 6.1 – Forma de onda, Praat.

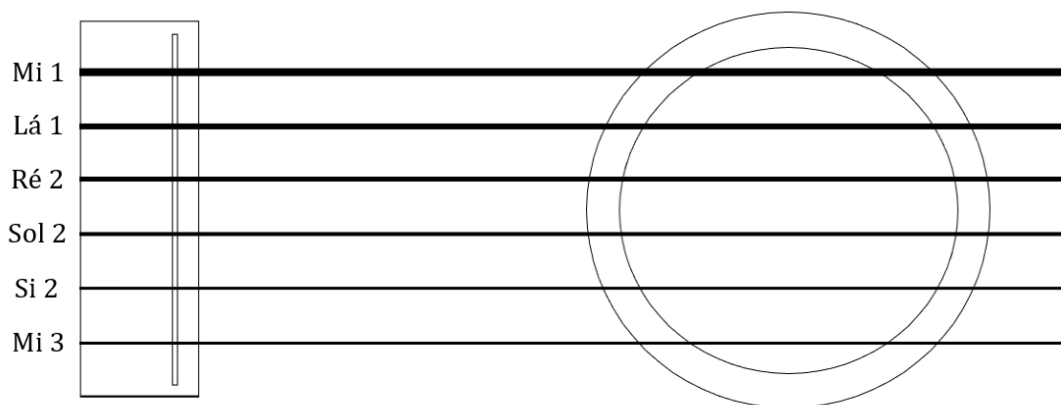


Fonte: Do autor.

Entretanto, como vimos no tópico 4.2, a produção sonora em um instrumento musical emite, além da frequência fundamental, os harmônicos superiores. Juntamente a isto, os instrumentos musicais estão sujeitos ao fenômeno da ressonância acústica e efeitos não lineares. De maneira que a combinação destes três acontecimentos gera irregularidades na onda, o que nos impede de utilizar o método sem o tratamento adequado ao som.

As seis cordas do violão exprimem as notas musicais Mi 1, Lá 1, Ré 2, Sol 2, Si 2 e Mi 3, conforme figura 6.2.

Figura 6.2 – Cordas do violão.



Fonte: Do autor.

O fenômeno da ressonância provoca a excitação de notas musicais que não estão sendo tocadas, ou seja, outras frequências além da nota musical executada irão soar, isto irá ocorrer com maior intensidade nas notas uma oitava acima ou abaixo das seis notas citadas anteriormente. Por exemplo, ao tocarmos a nota Mi 2 por ressonância provocamos a vibração da corda Mi 1 a nota Lá 2 provoca a vibração da corda Lá 1. Importante lembrar que este é um esquema para exemplificar o fenômeno da ressonância utilizando o violão, mas também vai ocorrer na viola caipira.

Os efeitos não lineares em sistemas oscilatórios estão presentes nas componentes de elasticidade, rigidez, amortecimento e dissipação. Isto significa que as vibrações influenciadas pelas componentes citadas acima não variam proporcionalmente ao deslocamento das massas que compõem o sistema. Em consequência deste comportamento as respostas vibratórias e acústicas apresentam novas frequências que não existiam na excitação, como por exemplo sub harmônicos e sons diferenciais, além do efeito de distorção sonora (HENRIQUE, 2002).

Posto isso, caso tentássemos calcular o fator de amortecimento a partir da figura 1, obteríamos com muita discrepância diferentes valores de amortecimento dependendo de qual região do gráfico fosse analisada. Desta maneira faz-se necessário o tratamento do sinal de áudio para que se obtenha a forma de onda apenas da frequência fundamental e assim, obter um gráfico condizente com a utilização do método.

6.2 Procedimento experimental

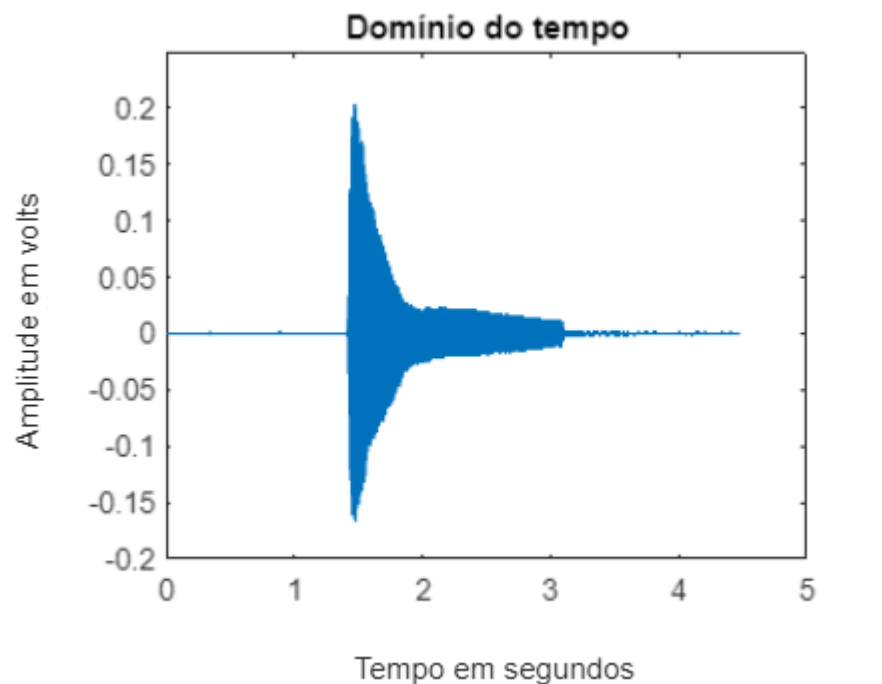
Durante a primeira fase do experimento, quando ocorre a execução e gravação das notas musicais, o violonista Matheus Brill, que é bacharel em violão pela UFRJ. Para a excitação das notas musicais pelo violonista foi necessária a tomada de alguns cuidados. O instrumento foi apoiado em uma das pernas do músico mantendo distância de seu tronco, no intuito de minimizar o contato entre eles, pois tal contato resultaria em um amortecimento que não é inerente ao objeto de estudo prejudicando as vibrações do instrumento. O músico então posicionou-se a aproximadamente 50 cm do microfone de gravação para executar as notas musicais, mantendo uma força constante e transversal às cordas, permitindo que as notas soassem até a extinção. Além disso, é necessário considerar o ambiente da experimentação. As gravações foram realizadas em uma sala retangular de alvenaria com janelas, estante de livros e armário, sendo que a superfície refletora mais próxima ao instrumento musical era o chão.

Definidos os parâmetros e cuidados durante a execução das notas musicais, as gravações foram realizadas utilizando o microfone de um notebook por meio do software *Praat*, dessa forma se obteve os arquivos de áudio a serem lidos e trabalhados no software *Matlab*.

Na segunda fase do experimento efetuamos a transferência e tratamento dos arquivos de áudios para o software *Matlab*. O tratamento dos arquivos de áudio foi realizado em cinco etapas de processamento, desde a leitura até o gráfico desejado para o cálculo do amortecimento do violão, para isto utilizou-se os códigos de programação mostrados por Teixeira (2015). Como exemplo do processamento de sinal e cálculo do amortecimento utilizaremos a nota Sol# 1.

A primeira etapa da segunda fase experimental consiste na leitura do arquivo de áudio e construção do gráfico que represente a forma de onda do áudio antes do tratamento (ver gráfico 6.1). Esta etapa foi realizada a partir dos códigos mostrados em código 6.1.

Gráfico 6.1 – Forma de onda. Matlab.



Fonte: Do autor.

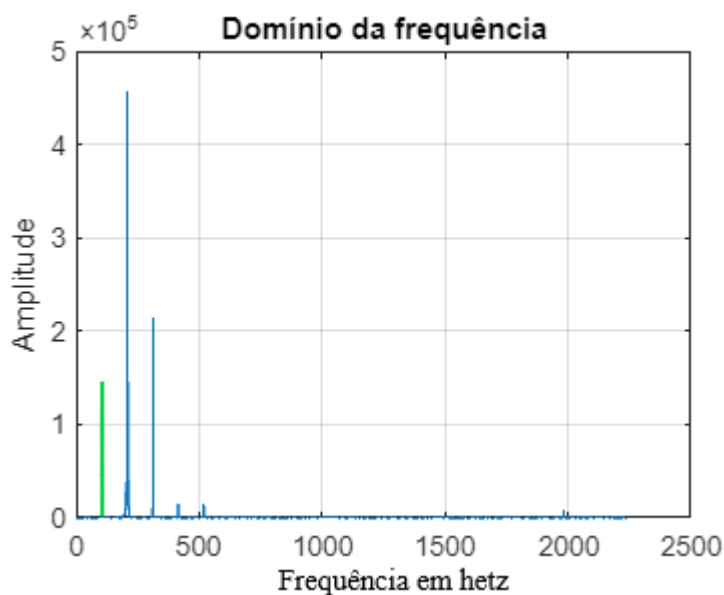
Código 6.1 - Leitura do sinal de áudio.

```
[sig,fs]=audioread('sol_1.wav');
t = linspace(0,length(sig)/fs,length(sig));
figure(1);
plot(t,sig);
title('Domínio do tempo');
xlabel('Tempo em segundos');
ylabel('Amplitude');
```

Fonte: TEIXEIRA, 2015.

Na segunda etapa, após gerarmos a forma de onda do sinal de áudio, convertemos o sinal para o domínio da frequência através da transformada rápida de Fourier (FFT), (ver gráfico 6.2) a partir dos códigos mostrados em código 6.2. Esta conversão é necessária para que possamos realizar a análise das frequências excitadas e, assim, descobrir a frequência fundamental e os harmônicos superiores da nota musical em questão.

Gráfico 6.2 – Conversão de sinal FFT.



Fonte: Do autor.

Código 6.2 – Transformada Rápida de Fourier.

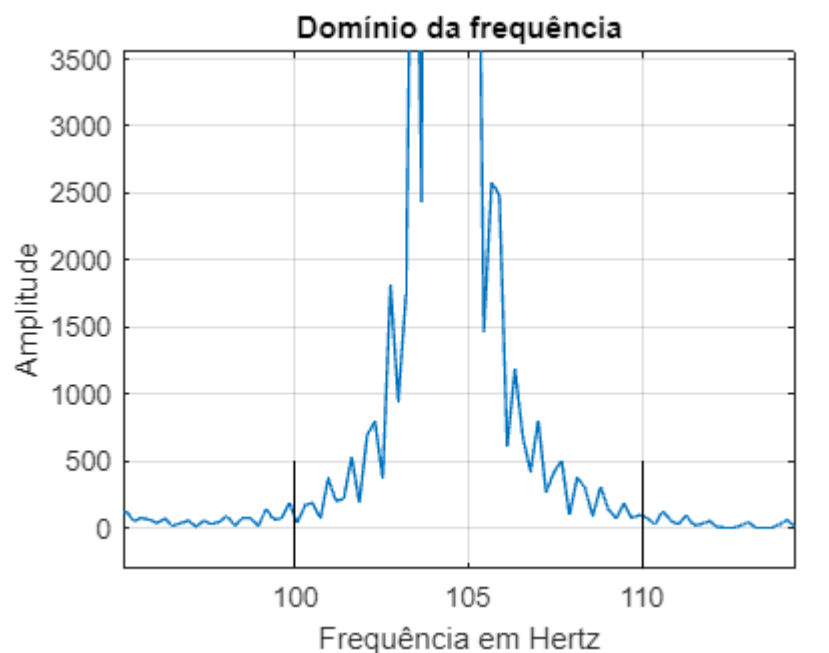
```
Y=fft(sig);
Y=Y.*conj(Y);
f=1:floor(length(sig)/2);
f=f/max(f);
f=f*fs/2;
figure(2); plot(f(1:10000),Y(1:10000));grid
title('Domínio da frequência');
xlabel('Frequência em Hertz');
ylabel('Amplitude');
```

Fonte: TEIXEIRA, 2015.

Importante perceber que neste exemplo a frequência fundamental não é o pico de maior energia, tal ocorrência se deve em razão da vibração de oitava que foi discutida na seção 3.4. Em razão da força aplicada nos pontos de fixação das cordas uma considerável quantidade de energia é aplicada ao sistema em razão da vibração dos pontos de fixação. Considerando que ao tempo de a vibração transversal efetuar um ciclo, a vibração de oitava irá efetuar dois ciclos, a frequência fundamental da vibração de oitava será uma 8ª acima da frequência fundamental da vibração transversal. Dessa forma, haverá um reforço de alguns harmônicos superiores.

Com a descoberta de qual o valor da frequência fundamental, representada na cor verde, é dado zoom no gráfico 6.2 para observarmos a largura da frequência fundamental (ver gráfico 6.3).

Gráfico 6.3 – Faixa de frequência.

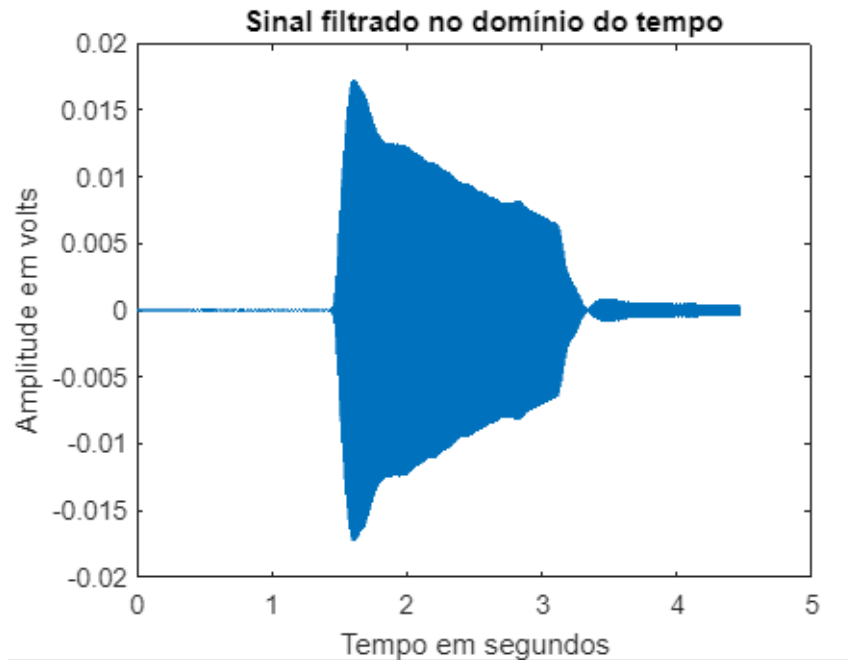


Fonte: Do autor.

Dessa forma passamos a terceira etapa: aplicação do filtro passa banda. O uso deste filtro no sinal de áudio irá delimitar uma faixa de frequência em torno da frequência fundamental e impedirá a passagem de todas as outras frequências presentes no sinal de áudio, ou seja, permitiremos a passagem de uma frequência e impediremos a passagem dos harmônicos superiores e ruídos que surgiram durante a gravação. A faixa de frequência permitida é determinada pelas bases da frequência fundamental que é variável para todas as notas musicais, dessa forma, faz-se necessário analisar cada nota musical para descobrir qual o valor da frequência fundamental e a largura de banda a ser utilizada no filtro (ver gráfico 6.3).

Neste procedimento, a filtragem nos gera um novo gráfico para o sinal de áudio representando apenas a frequência fundamental (ver gráfico 6.4). Todo este procedimento foi realizado utilizando os códigos mostrados em código 6.3.

Gráfico 6.4 – Forma de onda da frequência fundamental.



Fonte: Do autor.

Código 6.3 – Filtro passa banda.

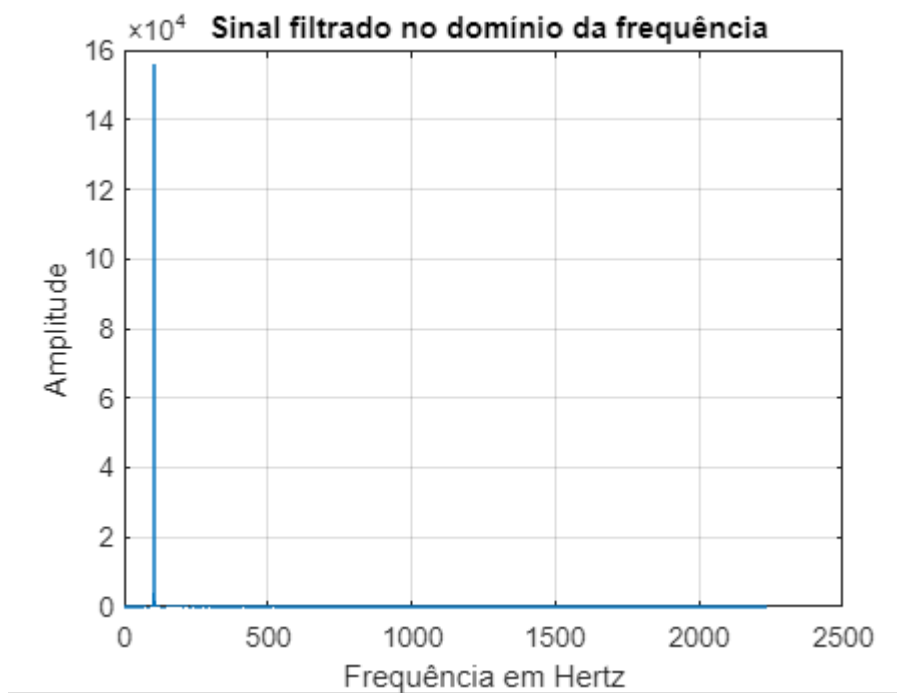
```
fnyq=fs/2;
fcutinf=100;
fcutsup=110;
relinf=fcutinf/fnyq;
relsup=fcutsup/fnyq;
ordem=3;
n=length(sig);
wn=[relinf relsup];
[b,a]=butter(ordem,wn);
[h,w]=freqz(b,a,n);
filsin=filter(b,a,sig);
figure(3); plot(t,filsin); grid
title(' Sinal filtrado no domínio do tempo');
xlabel('Tempo em segundos');grid
ylabel('Amplitude em volts');
sound(3*filsin,fs)
```

Fonte: TEIXEIRA, 2015.

Na quarta etapa aplica-se novamente a transformada rápida de Fourier (FFT) ao sinal filtrado, realizado na terceira etapa, retornando o sinal ao domínio da frequência. Dessa forma podemos verificar que a filtragem do sinal ocorreu de maneira correta. Espera-se que o gráfico

de verificação seja de amplitude x frequência com somente um pico de grande amplitude, representando a frequência fundamental (ver gráfico 6.5). Os códigos utilizados na quarta etapa são mostrados em código 6.4.

Gráfico 6.5 – Amplitude da frequência fundamental.



Fonte: Do autor.

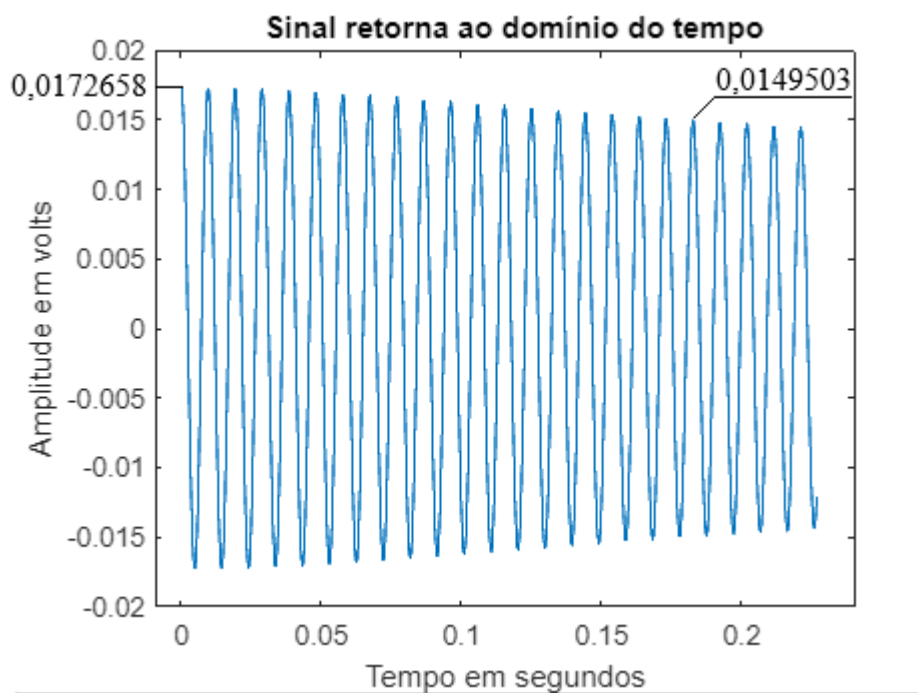
Código 6.4 – Verificação de filtragem.

```
Y2=fft(filsin);
Y2=Y2.*conj(Y2);
f=1:floor(length(filsin)/2);
f=f/max(f);
f=f*fs/2;
figure(4); plot(f(1:10000),(Y2(1:10000)));grid
title(' Sinal filtrado no domínio da frequência');
xlabel('Frequência em Hertz');
ylabel('Amplitude')
```

Fonte: TEIXEIRA, 2015.

Por último, retornamos o sinal ao domínio do tempo através da transformada inversa de Fourier (IFFT), (ver gráfico 6.6) para que possamos calcular o amortecimento do violão. Os códigos utilizados na quinta etapa são mostrados em código 6.5

Gráfico 6.6 – Forma de onda do sinal filtrado.



Fonte: Do autor.

Código 6.5 – Transformada inversa de Fourier.

```
laa=ifft(Y2);
n=max(filsin);
laa1=laa/max(laa);
laa2=laa1*n;
figure(5);plot(t(1:10000),laa2(1:10000));
title(' Sinal retorna ao domínio do tempo');
xlabel('Tempo em segundos');
ylabel('Amplitude em volts');
```

Fonte: TEIXEIRA, 2015.

6.3 Cálculo do amortecimento

Posto a realização do experimento, podemos calcular o fator de amortecimento (equação 5.10) utilizando o decremento logarítmico (equação 5.7) que é obtido através da razão entre os valores de duas amplitudes. A partir do gráfico 6.6 foram escolhidos o primeiro e vigésimo picos de amplitude, com seus valores sinalizados no gráfico. Utilizando como exemplo a nota Sol# 1 cuja frequência neste experimento é 104,3 Hz. Desta forma, seguem os cálculos.

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{x_1}{x_n} \right) = 0,007199815$$

- $n = 20$
- $\frac{x_1}{x_n} = \frac{0,0172658}{0,0149503}$

Dessa forma segue que o coeficiente de amortecimento será.

$$\zeta = \sqrt{\frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2}} = 0,001145885$$

6.4 Resultado experimental

Como exemplificado no tópico 6.2 todos os sinais de áudio apresentados neste trabalho também passaram pelo mesmo processo que a nota Sol# 1, para que fosse possível obter a forma de onda das notas musicais e posteriormente calcular o amortecimento. Dessa forma, segue a tabela 1.1 contendo: a frequência fundamental das notas musicais, os valores medidos dos picos, e os valores do coeficiente de amortecimento.

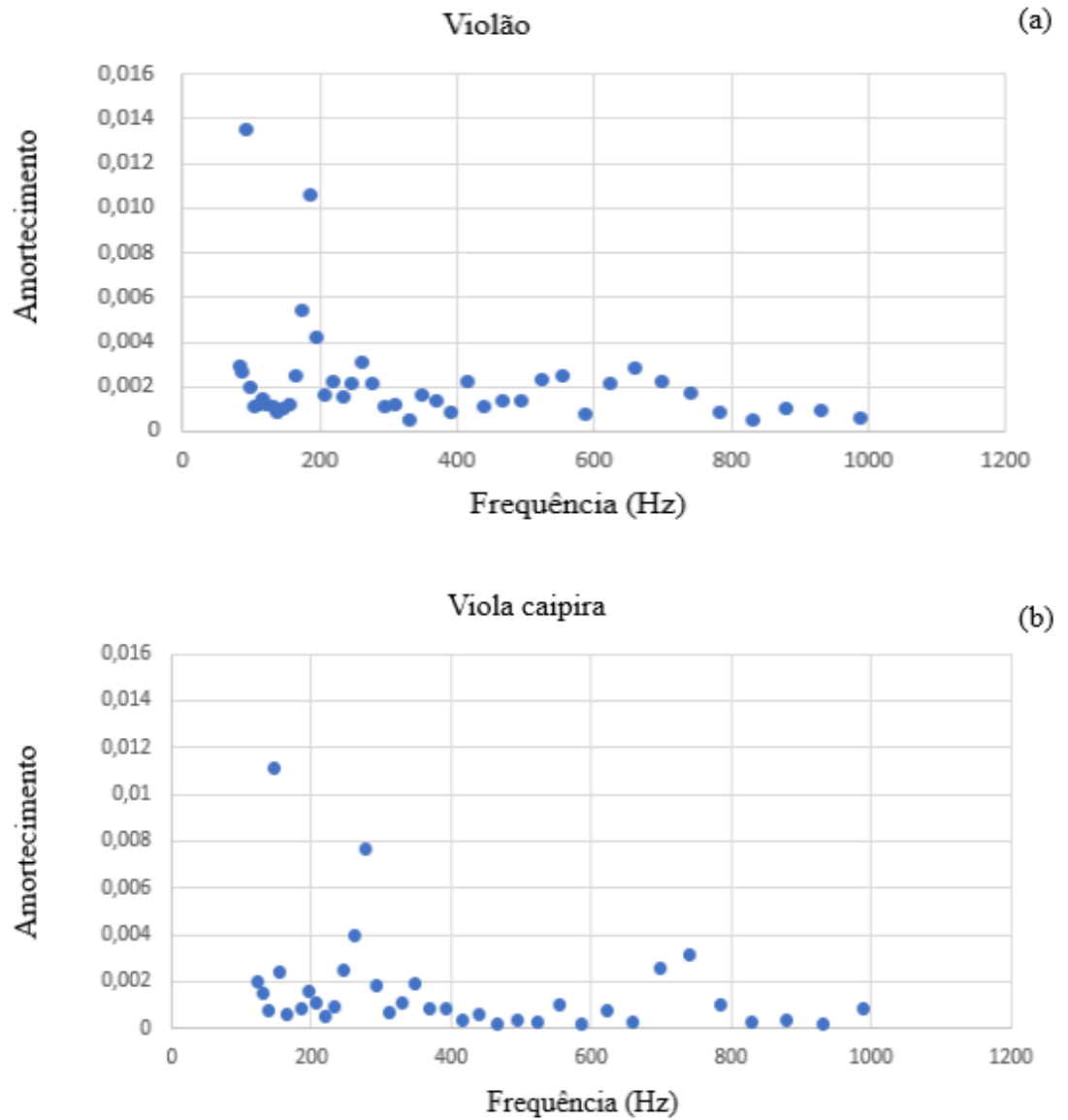
Tabela 6.1 – Fator de amortecimento do violão e da viola caipira.

Nota	Frequência (Hz)	Violão			Viola caipira		
		Pico 1	Pico 20	amortecimento ζ	Pico 1	Pico 20	amortecimento ζ
Mi1	82,4	0,0128065	0,00884097	0,002948780	-	-	-
Fa1	87,3	0,00784223	0,00563183	0,002634712	-	-	-
Fa#1	92,5	0,00423303	0,000772339	0,013536875	-	-	-
Sol1	98	0,00692788	0,00537505	0,00201956	-	-	-
Sol#1	103,8	0,0172658	0,0149503	0,001145885	-	-	-
La1	110	0,0104658	0,00899023	0,001209373	-	-	-
la#1	116,5	0,00635502	0,00531031	0,001429169	-	-	-
Si1	123,5	0,0127087	0,0109826	0,001161628	0,00143084	0,00111176	0,002007874
Do2	130,8	0,0117271	0,0101985	0,001111392	0,004685	0,0038987	0,001462018
Do#2	138,6	0,00634407	0,00569314	0,000861494	0,0130365	0,0118518	0,000758161
Re2	146,8	0,0219354	0,0192046	0,001057997	0,0287164	0,00708847	0,011132189
Re#2	155,6	0,0359612	0,0309185	0,001202302	0,0694501	0,0511192	0,002438631
Mi2	164,8	0,0175947	0,0128163	0,002521642	0,021875	0,020271	0,000606007
Fa2	174,6	0,015683	0,007969	0,005387462	0,0115781	0,000976933	0,019671345
Fa#2	185	0,034677	0,00914821	0,010603248	0,0105908	0,00955395	0,000819895
Sol2	196	0,125062	0,0738434	0,004192606	0,015467	0,0127366	0,001545623
Sol#2	207,7	0,105519	0,0861498	0,001613856	0,0144091	0,0125908	0,001073448
La2	220	0,0820897	0,0621669	0,002212168	0,0538602	0,0506152	0,000494493
La#2	233,08	0,0552441	0,0452873	0,00158148	0,102165	0,090606	0,000955476
Si2	246,9	0,00554462	0,00422406	0,002164752	0,0122664	0,00901519	0,002450604
Do3	261,6	0,0101813	0,00687468	0,003125053	0,12397	0,0751444	0,003983839
Do#3	277,2	0,015844	0,0121266	0,002127813	0,207249	0,0793	0,007644648
Re3	293,7	0,0391463	0,0341503	0,001086507	0,0708442	0,056087	0,00185876
Re#3	311,2	0,024808	0,0214046	0,001174247	0,0435974	0,0400518	0,000675007
Mi3	329,6	0,0256904	0,0241417	0,000494787	0,0560896	0,0491981	0,001043224
Fa3	349,2	0,0134946	0,0110035	0,001623985	0,0668556	0,0525759	0,001912062
Fa#3	370	0,0217486	0,0183019	0,001373064	0,00479569	0,00431978	0,000831689
Sol3	392	0,0432754	0,0389771	0,00083246	0,041323	0,03731	0,000812946
Sol#3	415,5	0,0336117	0,0253372	0,002248858	0,0319672	0,0306208	0,000342429
La3	440	0,00794004	0,00691532	0,001099593	0,033045	0,0308172	0,000555429
La#3	466,2	0,00856411	0,0072222	0,001356163	0,0399017	0,0391083	0,000159825
Si3	493,9	0,029829	0,0250281	0,001396439	0,0257157	0,0246609	0,000333292
Do4	523,3	0,0863535	0,064704	0,002296809	0,0288052	0,0278914	0,000256538
Do#4	554,4	0,0583487	0,0428339	0,00245979	0,0516406	0,0453409	0,001035292
Re4	587,3	0,0201276	0,018216	0,000794117	0,0567042	0,0551722	0,000217955
Re#4	622,3	0,0203702	0,0155498	0,002148788	0,0541492	0,0493832	0,00073317
Mi4	659,3	0,038662	0,02694	0,002874685	0,0846778	0,0820614	0,00024976
Fa4	698,5	0,0201424	0,0151317	0,00227619	0,0819354	0,0594507	0,002552708
Fa#4	740	0,0240895	0,019395	0,001724925	0,067607	0,0457595	0,00310599
Sol4	784	0,0174145	0,0156351	0,000857724	0,084171	0,0744941	0,000971883
Sol#4	830,6	0,030464	0,0284998	0,000530373	0,0372476	0,036094	0,000250358
La4	880	0,0288717	0,0253614	0,00103159	0,0392297	0,0377079	0,000314844
La#4	932,3	0,0230504	0,0203904	0,00097577	0,0231475	0,0226338	0,000178591
Si4	987,8	0,0238033	0,0219678	0,000638581	0,0972348	0,0878434	0,000808292

Fonte: Do autor.

Realizado o cálculo do coeficiente de amortecimento para cada nota musical foi possível esboçar o gráfico que relacione o amortecimento e frequência, ver gráfico 1.7 (a) e (b).

Gráfico 6.7 – Relação amortecimento x frequência.



Fonte: Do autor.

6.4.1 Análise de resultado

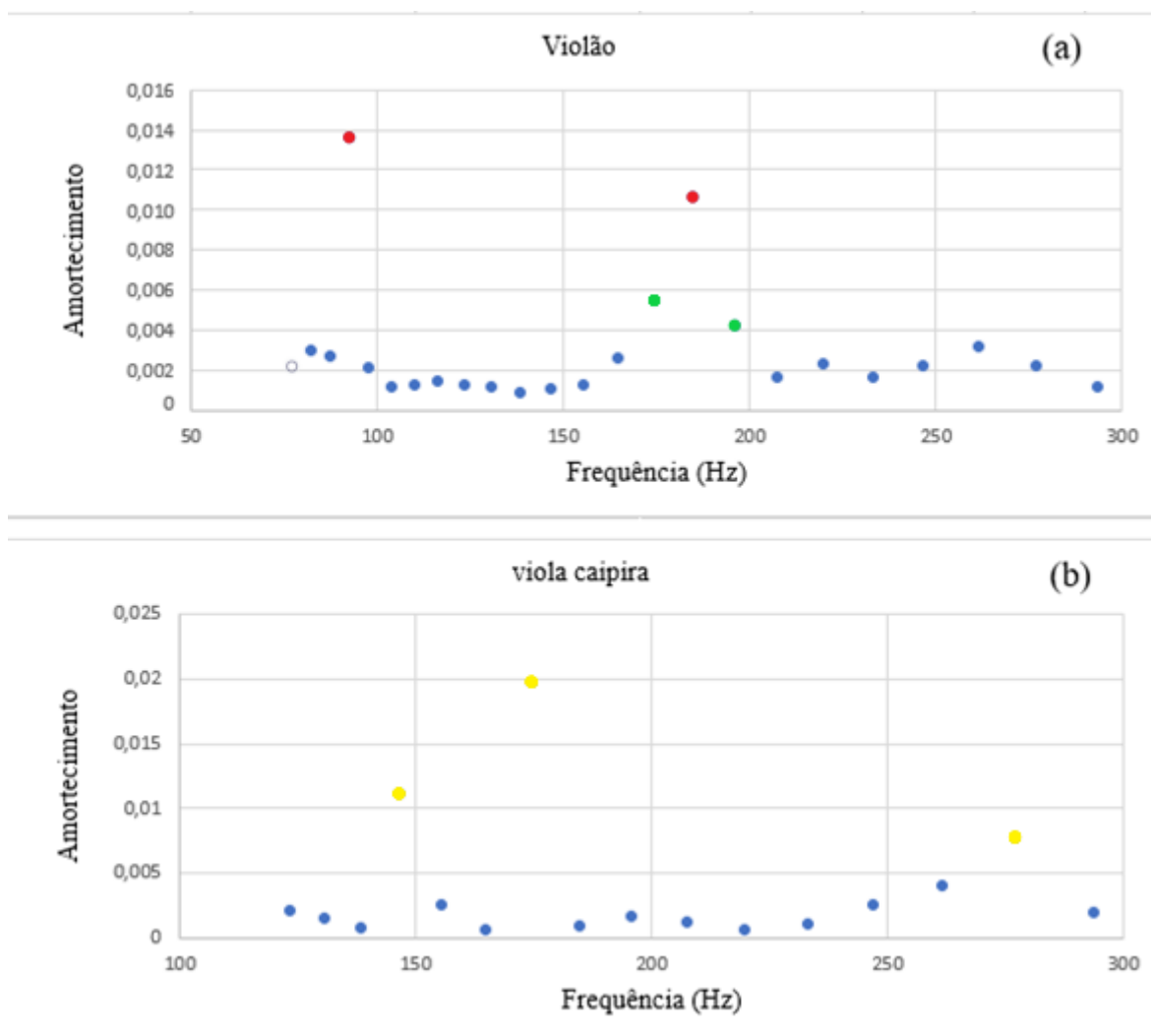
Traçando uma investigação a partir do gráfico 6.7 é notável que a começar em 300 Hz existe um padrão nos valores de amortecimento, não ultrapassando 0,004 em ambos os instrumentos. Entretanto, ocorrem diferenças significativas nas frequências mais baixas. Dessa forma, segue a tabela 6.2 com as médias a serem comentadas e o gráfico 6.8 (a) e (b) dividindo a faixa de frequência.

Tabela 6.2 – Média do fator de amortecimento por faixa de frequência.

	Média de amortecimento ζ	
Faixa de frequência	Violão	Viola caipira
82,4 - 987,8	0,002207834	0,002060657
82,4 - 293,7	0,00291025	0,003681438
311,2 - 987,8	0,001438521	0,000825775

Fonte: Do autor.

Gráfico 6.8 - Relação amortecimento x frequência abaixo de 300 Hz.



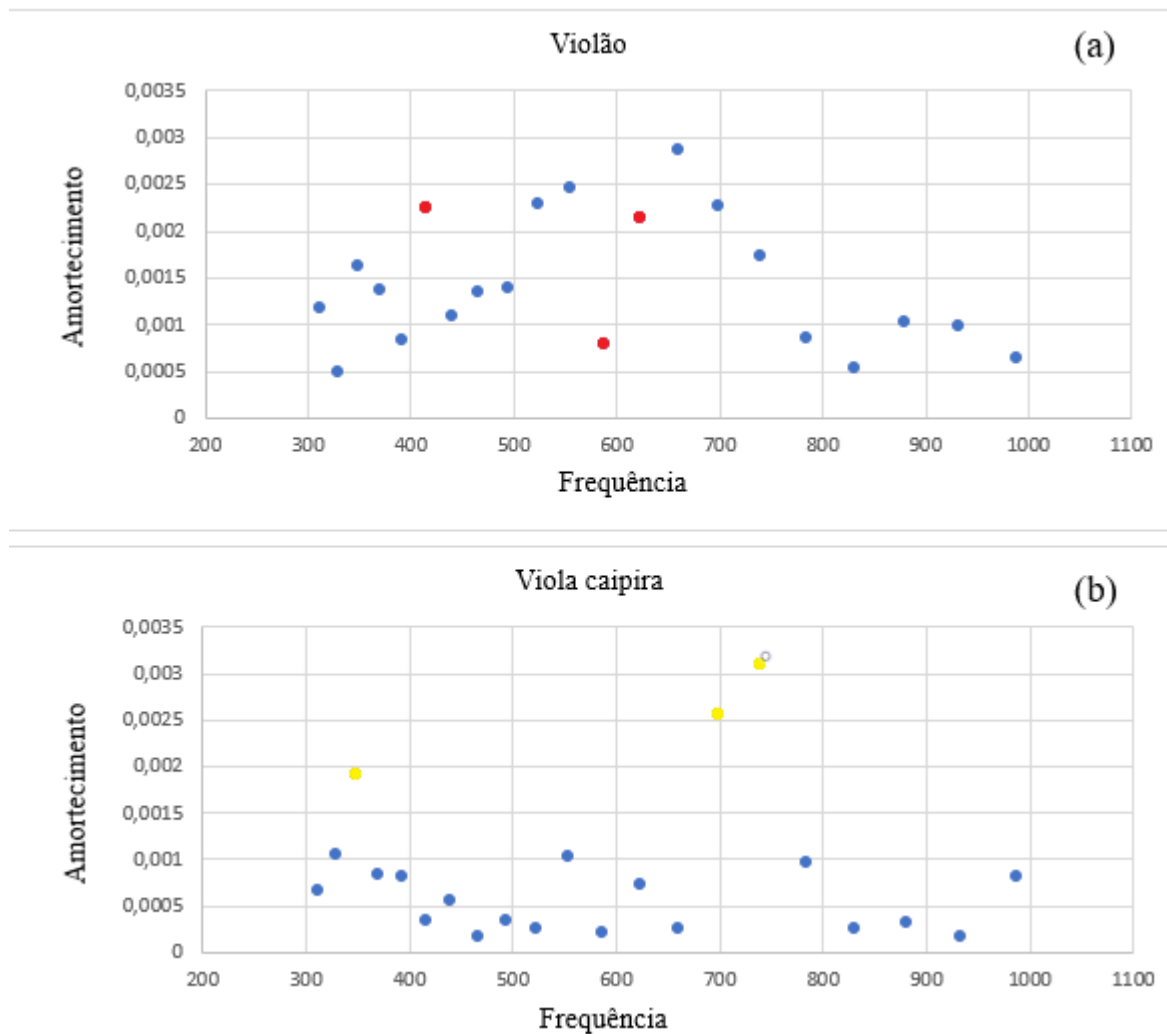
Fonte: Do autor.

Neste contexto, podemos perceber que para frequências abaixo de 300 Hz os instrumentos exibem altos valores de amortecimento. No violão identificamos as notas musicais Fá 2 e Sol 2, que estão indicadas em verde, com desvio moderado e as notas Fá# 1 e Fá# 2, que estão indicadas em vermelho, com elevado desvio no fator de amortecimento quando comparada às outras notas musicais, visto que todas as outras frequências possuem fator de amortecimento abaixo de 0,004. Já na viola caipira identificamos as notas Ré 2, Fá 2 e Dó# 3, que estão indicadas em amarelo, com elevado desvio no fator de amortecimento, de modo que a nota Dó#3, que possui o menor desvio, ainda tem seu fator de amortecimento (0,0076) maior que o dobro da média (0,0036).

Tratando a faixa de frequência acima de 300 Hz, os instrumentos possuem baixos valores de amortecimento quando comparado ao quadro geral. No violão embora tenhamos uma

boa distribuição dos valores de amortecimento sem a ocorrência de pontos destoantes, ocorrem pequenos saltos nos valores de amortecimento das notas Sol# 3, Ré 4 e Ré# 4, indicadas em vermelho no gráfico 6.9 (a). Na viola caipira os valores de amortecimento encontram-se bem agrupados, com exceção das notas Fá 3, Fá 4 e Fá# 4, indicadas em amarelo no gráfico 6.9 (b), que possuem alto fator de amortecimento quando comparados a esta faixa de frequência.

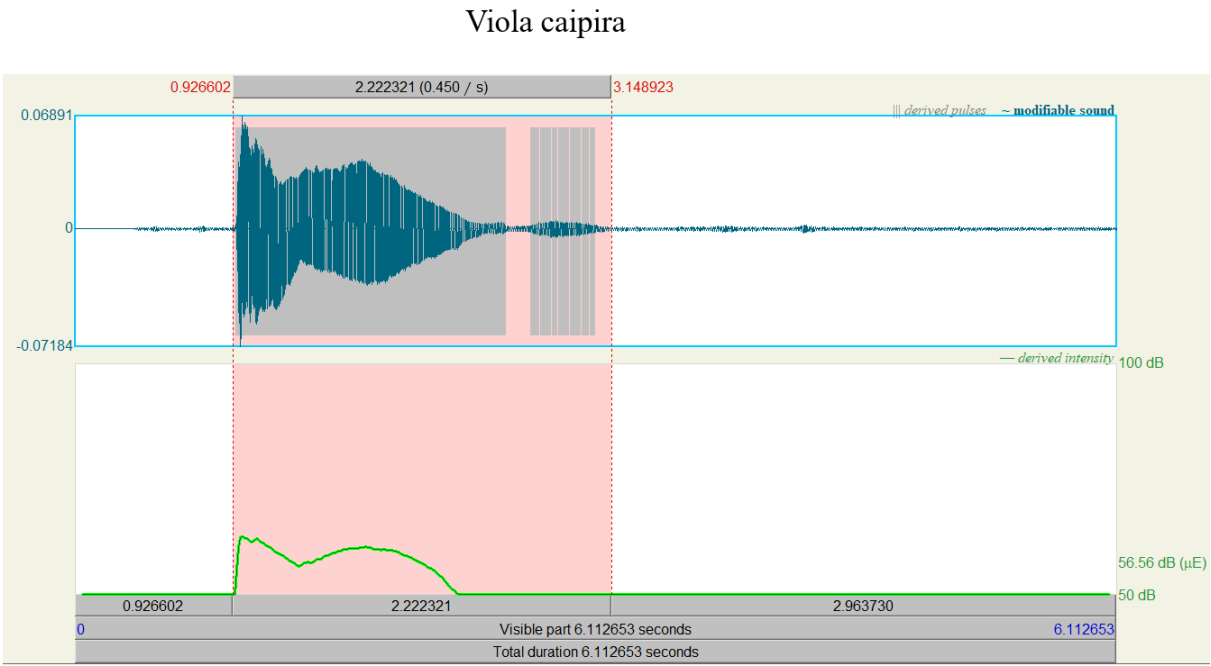
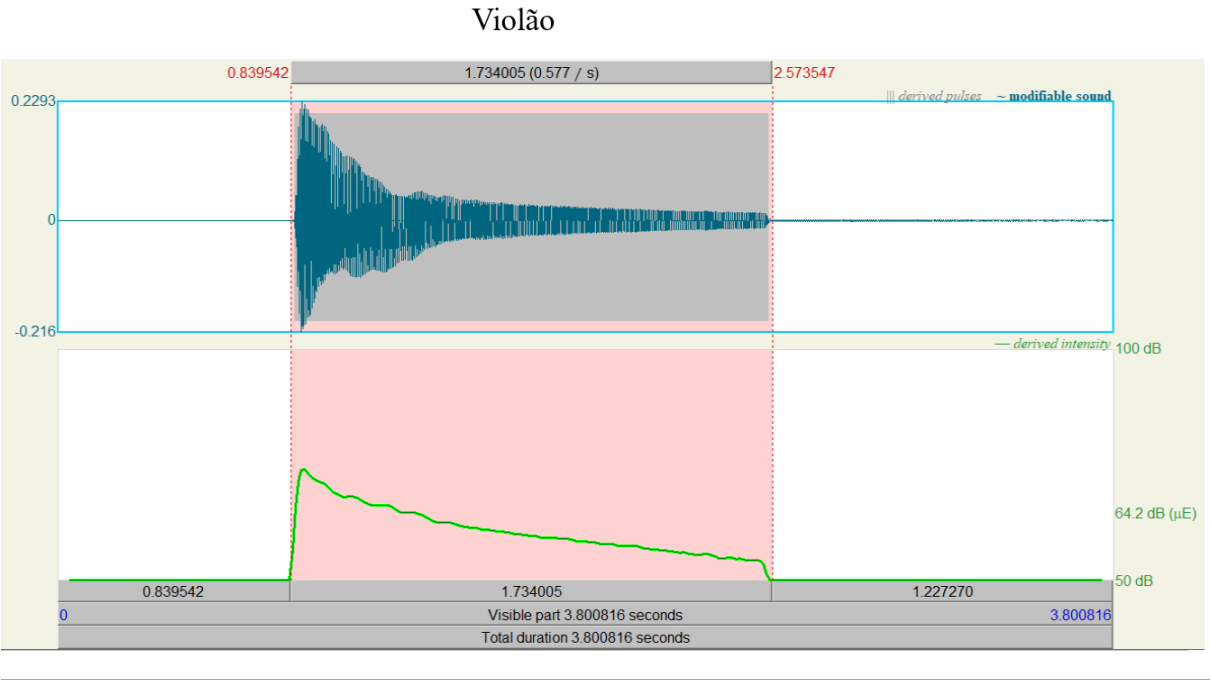
Gráfico 6.9 - Relação amortecimento x frequência acima de 300 Hz.



Fonte: Do autor.

Após a realização do experimento e cálculo do amortecimento, foi utilizado o programa Praat com o intuito de analisar a forma de onda, (ver figura 6.3) e o espectro sonoro, (ver figura 6.4) dos instrumentos. Tomaremos como exemplo e comparação a nota musical Fá 2.

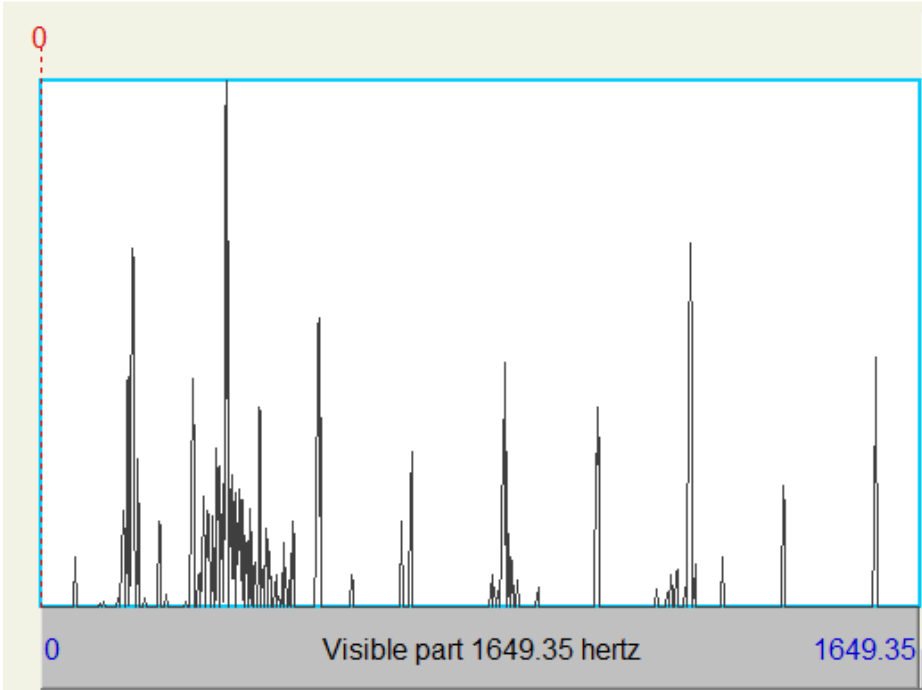
Figura 6.3 – Forma de onda e decaimento.



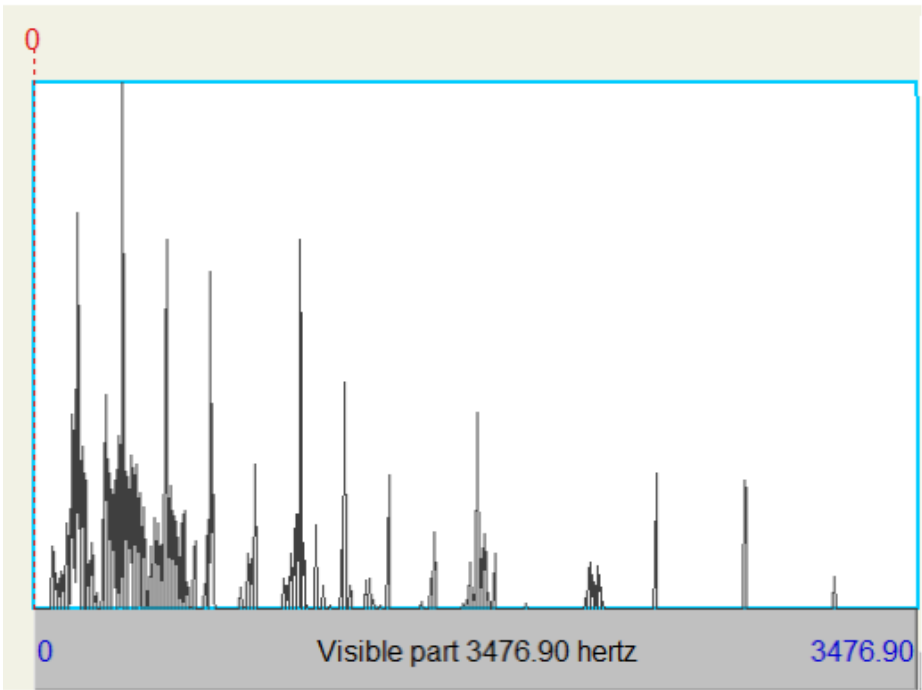
Fonte: Do autor.

Figura 6.4 – Espectrograma.

Violão



Viola caipira



Fonte: Do autor.

Como vimos no tópico 4.2, o timbre está relacionado a características físicas do instrumento, que são responsáveis por definir a forma de onda gerada. A partir da figura 6.3 é clara a diferença nas ondas produzidas por uma mesma nota musical, Tal diferença era esperada dada as distinções na construção dos instrumentos possibilitando a distinção sonora da viola caipira e do violão, que trazem diferentes sensações tímbricas.

Com a análise e comparação das notas musicais notou-se que em geral o som emitido pela viola caipira possui maior duração em comparação ao violão, contudo o violão possui maior intensidade sonora. O tempo de persistência sonora é influenciado pelo coeficiente de amortecimento, que é responsável pela dispersão energética do sistema. Neste experimento, mostrou-se que a viola caipira possui seu fator de amortecimento menor que o violão, dessa forma suas notas musicais soam por maior período. Além disso, as notas musicais na viola caipira por serem dedilhadas com uma dupla de cordas, quando executamos uma nota musical estamos excitando duas fontes vibratórias, de maneira que se aplicam mais vibrações na viola caipira do que no violão para a execução de uma mesma nota musical.

A diferença na intensidade sonora está relacionada tanto à construção do instrumento quanto a sua execução. Os instrumentos utilizados no experimento são confeccionados a partir de diferentes materiais e dimensões, estes aspectos além de alterar como as oscilações se processam fazem com que cada instrumento consiga deslocar uma quantidade diferente de ar na sua caixa acústica. Dessa forma, pelo violão possuir maior caixa acústica consegue movimentar uma massa de ar maior que a viola caipira. Já a respeito da execução, trata-se da técnica e força utilizada pelo músico para produzir as notas musicais, de maneira que, quando o músico imprime mais força ao tocar o instrumento, provoca maiores vibrações e o som resultante possui maior intensidade.

Ainda que o valor médio de amortecimento dos instrumentos seja muito próximo e que exista similaridade vibracional entre os instrumentos que foi comentada no capítulo 4, é perceptível a diferença sonora entre eles. Por exemplo, a partir do espectrograma, (ver figura 6.4) podemos ver que a viola caipira aciona mais que o dobro de harmônicos durante a execução de uma nota musical, provocando maior brilho sonoro. Esta ocorrência possui três razões principais.

Primeiramente, as cordas na viola caipira são de aço enquanto no violão são de nylon, tal diferenciação no material irá provocar mudança em como a onda se propaga na corda e nos modos normais de vibração da corda, pois como vimos no capítulo 3 os modos normais de

vibração podem variar de acordo com as propriedades físicas do material, como por exemplo o módulo de Young e de cisalhamento.

Ainda com relação aos materiais da infraestrutura, teremos variação nos modos normais de vibração do tampo harmônico em decorrência das diferenças na estrutura dos instrumentos analisados. Como estudado no capítulo 4, as oscilações desta região variam de acordo com a densidade e as dimensões da superfície, dessa forma a variação destas grandezas juntamente com as diferentes configurações de travessas irão proporcionar variabilidade na forma como as ondas se propagam na estrutura de cada instrumento musical analisado.

Em terceiro, como citado que as notas musicais da viola caipira são executadas sempre com uma dupla de cordas, além de fornecer a maior energia ao sistema, a vibração das duas cordas destaca as vibrações de oitava em comparação ao violão, a combinação destes dois casos aumenta as oscilações estruturais instigando mais harmônicos na viola caipira.

6.4.2 Comparação com o trabalho de referência

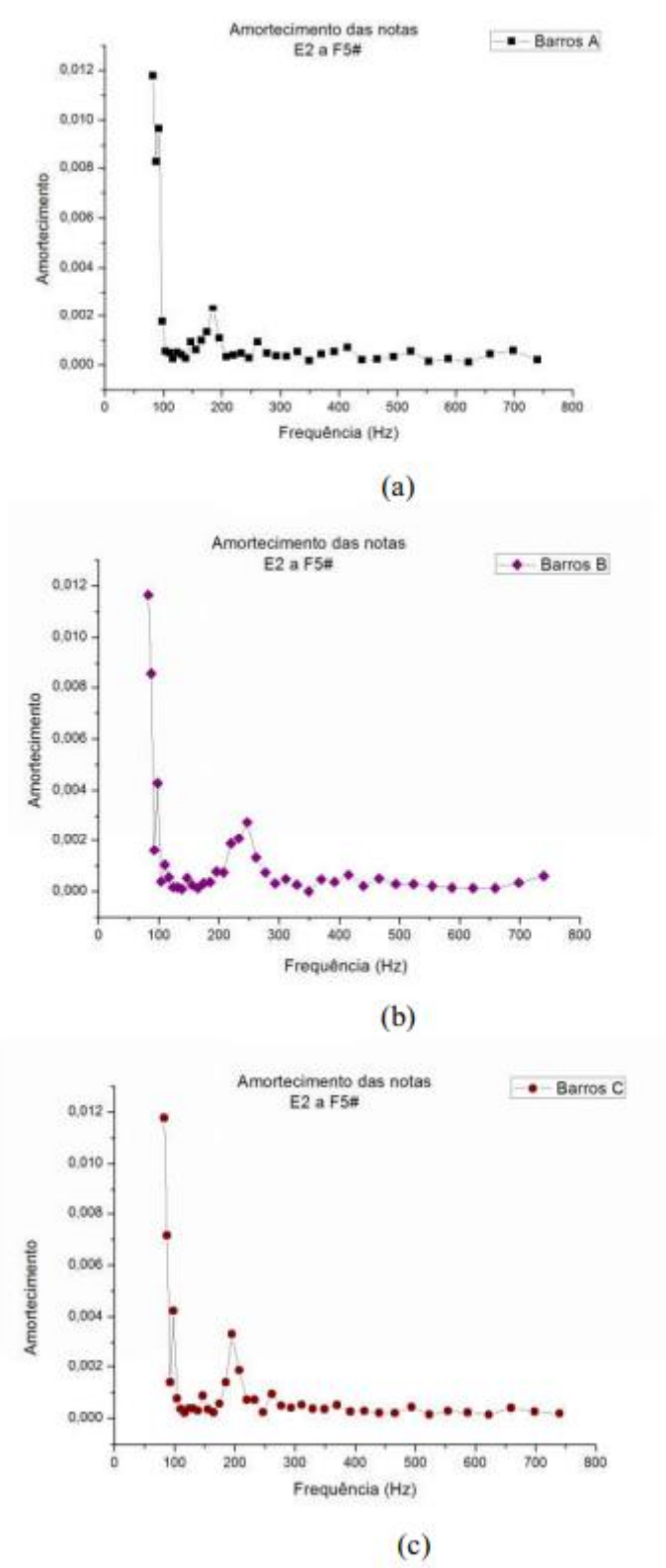
Neste trabalho tomou-se como referência a dissertação de mestrado do Paulo Sérgio Teixeira, que realizou o cálculo do fator de amortecimento de cinco violões (ver tabela 6.3), e gerou os gráficos que relacionam o amortecimento com a frequência de excitação dos instrumentos (ver gráficos 6.10 (a), (b), (c), (d), (e)). Posto isso, com o intuito de observar as diferenças encontradas nos violões utilizados por Teixeira e o violão utilizado neste trabalho podemos realizar uma comparação entre o gráficos 6.7 e 6.10.

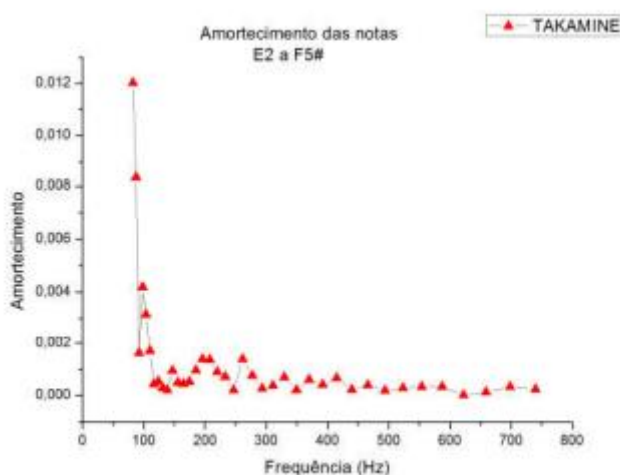
Tabela 6.3 – Taxa de amortecimento, Teixeira.

Planilha de dados comparando o amortecimento de cinco violões					
Nota Fundamental (Hertz)	Amortecimento				
	Barros Classe A	Barros Classe B	Barros Classe C	Takamine Classe D	Gianini Classe E
82,43	1,17818130E-02	0,01164831	1,177910E-02	1,202E-02	1,193E-02
87,31	8,25633725E-03	8,5301E-03	7,148158E-03	8,338E-03	8,682E-03
92,5	9,66130261E-03	1,6161E-03	1,396792E-03	1,617E-03	1,738E-03
98	1,77123807E-03	4,2830E-03	4,233073E-03	4,180E-03	4,370E-03
103,83	5,59841003E-04	3,8862E-04	7,708461E-04	3,147E-03	7,376E-04
110	4,95493981E-04	1,0394E-03	3,662310E-04	1,698E-03	2,288E-04
116,54	2,51173647E-04	5,5267E-04	2,096192E-04	4,353E-04	2,024E-04
123,47	5,14315080E-04	1,6804E-04	3,781001E-04	5,453E-04	3,957E-04
130,81	4,18875350E-04	1,6520E-04	3,814492E-04	2,807E-04	2,473E-04
138,59	2,72525653E-04	1,0236E-04	3,070239E-04	2,040E-04	1,214E-04
146,83	9,29522452E-04	5,1965E-04	8,783809E-04	9,406E-04	5,602E-04
155,56	6,11242405E-04	2,4675E-04	3,482330E-04	4,945E-04	5,035E-04
164,81	9,98903026E-04	1,3169E-04	2,312802E-04	4,525E-04	1,162E-04
174,61	1,34049264E-03	3,2170E-04	5,713298E-04	5,205E-04	2,864E-04
185	2,32658285E-03	3,6705E-04	1,394953E-03	9,707E-04	5,473E-04
196	1,08834402E-03	7,7532E-04	3,331207E-03	1,392E-03	5,079E-04
207,65	3,38212373E-04	7,4221E-04	1,858666E-03	1,355E-03	1,938E-04
220	4,02096624E-04	1,876E-03	7,185386E-04	9,078E-04	3,010E-03
233,08	4,70536672E-04	2,0729E-03	7,220990E-04	7,142E-04	2,487E-03
246,94	2,84519124E-04	2,7667E-03	2,413983E-04	2,161E-04	2,444E-04
261,63	9,26349061E-04	1,3289E-03	9,414609E-04	1,383E-03	7,785E-04
277,18	4,70818010E-04	7,3715E-04	4,897412E-04	7,619E-04	8,019E-04
293,66	3,58948057E-04	3,1185E-04	4,103617E-04	2,674E-04	1,180E-04
311,13	3,45024108E-04	4,8790E-04	5,244069E-04	3,823E-04	4,361E-04
329,63	5,34384554E-04	2,6224E-04	3,719387E-04	6,906E-04	4,078E-04
349,23	1,75340955E-04	8,0119E-06	3,613938E-04	2,073E-04	1,263E-04
369,99	4,41708771E-04	4,6918E-04	5,174644E-04	6,090E-04	2,655E-04
391,99	5,46691752E-04	3,7039E-04	2,673601E-04	4,211E-04	4,906E-04
415,31	7,12402022E-04	6,4487E-04	2,842466E-04	6,707E-04	7,366E-04
440	2,03553949E-04	2,1583E-04	2,159974E-04	2,243E-04	1,608E-04
466,16	2,41881608E-04	5,0118E-04	2,076406E-04	3,916E-04	1,707E-04
493,88	3,38862850E-04	2,9334E-04	4,361314E-04	1,873E-04	1,362E-04
523,25	5,51767787E-04	2,8896E-04	1,540710E-04	2,902E-04	2,163E-04
554,36	1,50223440E-04	2,1155E-04	2,888432E-04	3,415E-04	2,815E-04
587,32	2,57663169E-04	1,4935E-04	2,358145E-04	3,278E-04	7,856E-05
622,24	1,10708901E-04	1,2648E-04	1,439815E-04	2,110E-05	1,420E-04
659,24	4,52373885E-04	1,2744E-04	4,021748E-04	1,250E-04	3,389E-04
698,46	5,90546019E-04	3,4054E-04	2,643330E-04	3,383E-04	5,340E-04
739,99	2,04525685E-04	5,9954E-04	1,904755E-04	2,353E-04	2,012E-04

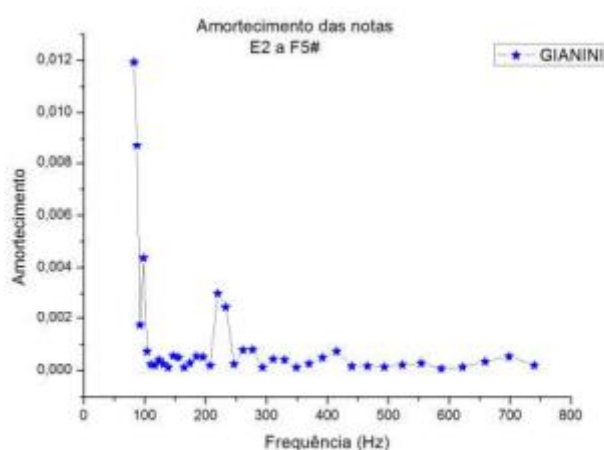
Fonte: Teixeira, 2015.

Gráfico 6.10 – Amortecimento x frequência, Teixeira.





(d)



(e)

Fonte: Teixeira, 2015.

Podemos observar que de maneira similar ao analisado neste trabalho para as baixas frequências, nos instrumentos utilizados por Teixeira também ocorrem valores destoantes no fator de amortecimento, com desvios elevados ou moderados, mas para as frequências acima de 300 Hz os valores de amortecimento são bastante próximos, não tendo grande discrepância entre os valores encontrados. Por exemplo, no violão Barros A as notas musicais Mi 1, Fá 1 e Fá# 1 possuem desvio elevado e as notas Sol 1 e Fá# 2 desvio moderado no fator de amortecimento quando comparadas às outras notas musicais. De maneira geral os valores obtidos neste trabalho são bem próximos dos alcançados por Teixeira (2015). Desse modo podemos inferir que é de natureza dos violões a ocorrência do elevado grau de amortecimento para as baixas frequências, mas para que esta análise seja validada deve ser feita uma investigação mais profunda para comprovar o fato e determinar o motivo dessa ocorrência.

CONCLUSÃO

No desenrolar deste trabalho foram apresentadas informações que nos permitissem a qualificação de sistemas vibratórios, neste caso os instrumentos musicais de cordas dedilhadas. Esta fundamentação foi iniciada com o estudo sobre os amortecimentos que agem numa estrutura vibrante. O conhecimento sobre tal característica do sistema influencia diversas áreas científicas, pois define o decaimento energético e as amplitudes de vibração em uma estrutura qualquer. Assim, este atributo pode ser aplicado em diversas áreas como: engenharia estrutural, mecânica dos fluidos, estudo dos materiais absorvedores e acústica.

Tomou-se como escolha de instrumentos o violão e a viola caipira, dois instrumentos musicais de mesma classe, mas com dissemelhanças marcantes. Realizamos um estudo sobre toda a estrutura, desde as vibrações iniciadas nas cordas, até a produção sonora através da caixa acústica, onde foi possível demonstrar como se qualificam os modos normais de vibração, a fim de investigar quais características do sistema, como massa, elasticidade e amortecimento são relevantes para cada uma das quatro vibrações presentes em uma corda: transversais longitudinais, torcional e de oitava.

Por fim, foi realizada uma experimentação com o intuito de medir o coeficiente de amortecimento, demonstrar as diferenças acústicas e qualificar os instrumentos escolhidos. Em comparação aos instrumentos foi observado que o violão possui amortecimento maior que a viola caipira, considerando a faixa de frequência de 82,4 Hz a 987,8 Hz, entretanto em ambos há a ocorrência de pontos extremos no fator de amortecimento na faixa de frequências abaixo de 300 Hz. No violão as notas identificadas foram Fá 2, Sol 2, Fá# 1 e Fá# 2 e na viola caipira tais notas com desvio foram Ré 2, Fá 2 e Dó# 3. Já para as frequências acima de 300 Hz, no violão ocorreu uma boa distribuição dos valores de amortecimento, mas com pequenos saltos nas notas Dó# 4, Ré 4 e Ré# 4, na viola caipira os valores de amortecimento encontram-se melhor agrupados, mas com pontos extremos no valor de amortecimento para as notas Fá 3, Fá 4 e Fá# 4.

Na análise acústica dos instrumentos, utilizou-se o programa *Praat* para verificar a forma de onda e espectrogramas das notas musicais dos instrumentos, tomando como exemplo a nota Fá 2. Verificamos a distinção na forma de onda produzida pelos instrumentos, o que condiz com a teoria tímbrica tratada no tópico 4.2. Além disso, percebemos que o violão possui menor persistência sonora e maior intensidade sonora em comparação a viola caipira, estas

características dos instrumentos condizem com os estudos realizados no capítulo 1 sobre amortecimento e capítulo 4 sobre a produção sonora dos instrumentos.

Com relação à análise espectral dos instrumentos, foi descoberto que a viola caipira aciona mais harmônicos que o violão durante a execução da mesma nota musical. Este fato provoca diferença na sensação tímbrica que ouvimos, dando espaço por exemplo ao estudo da psicoacústica, o ramo que investiga as sensações que o som provoca nas pessoas. A diferença no acionamento dos harmônicos e a sensação tímbrica provocadas pelos instrumentos eram previstos que ocorressem, visto as diferenças estruturais tratadas durante o trabalho como: as propriedades físicas dos materiais, a disposição das travessas e o número de cordas que compõem os instrumentos, dessa forma o observado durante o estudo teórico pode ser comprovado com a experimentação.

Referências:

COSSOLINO L.C.; PEREIRA, A.H.A. Amortecimento: classificação e métodos de determinação. ATCP Engenharia Física, 2010. Disponível em:

<https://sonelastic.com/images/ITC04-ATCP.pdf>. Acesso em: 16/04/2023.

FERNÁNDEZ, S. F. **Equação da onda**. Youtube, 2020. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=Obtup3zNvfg&list=PLYdvCV9zQg3TK1GqaVCsLRcHHidVFRSU9>. Acesso em: 16/08/2023.

FLETCHER, N. H.; ROSSING, T. D. **The Physics of Musical Instruments**. New York: Springer-Verlag, Inc., 1991

HENRIQUE, L. L. **ACÚSTICA MUSICAL**. Fundação Calouste Gulbenkian – Lisboa, 2002.

MASOTTI, D. **Comparação de métodos de determinação do amortecimento estrutural através de técnicas de ajuste de curvas de funções resposta em frequência**. Orientador: Arcanjo Lenzi. 2013. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013. Disponível em:

<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/107299/318583.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acessado em: 23/04/2023.

MORAIS, J. P. R. **Caracterização do amortecimento estrutural em painéis sanduíche tipo honeycomb**. Orientador: Sergio Henrique da Silva Carneiro. 2018. Monografia – Engenharia Aeroespacial. Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em:

https://bdm.unb.br/bitstream/10483/22615/1/2018_JoaoPauloMorais_tcc.pdf. Acesso em: 23/04/2023.

MUSOLINO, B. C. **Algoritmo de determinação do coeficiente de amortecimento em materiais refratários de alta alumina**. Orientador: Carlos Dias Maciel. 2011. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18152/tde-18102011-153929/publico/Bruno.pdf>. Acesso em: 18/04/2023

NICOLETTI, R. **Vibrações Mecânicas**. Apresentação em Power Point. Disponível em: https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/7515668/mod_resource/content/1/SEM172_AULA4_Decremento_Logaritmico.pdf. Acesso em: 12/06/2023

NUSSENZVEIG, H. M. **Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor**. 3. Ed. São Paulo, Edgar Blucher, 1996.

PAIVA, G. O. **Vibroacoustic Characterization and Sound Synthesis of the Viola Caipira**. 2017. Tese (Doutorado). Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, 2017.

PEDROZO, F.; FREITAS, T. **Modelo analítico para instrumentos musicais de cordas dedilhadas**. Revista brasileira do ensino de física, nº 44, 2022.

RESNICK, R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. **FÍSICA 2**. 5 ed. Vol 2. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

RICHART Jr., F. E.; HALL Jr., J. R.; WOODS, R. D. **Vibrations of soils and foundations**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1970.

TAVARES, A. D. et al. **Cordas vibrantes como introdução a realidade quântica**. Revista de ensino de física, Vol 11, 1989.

TEIXEIRA, P. S. **Análise e síntese de sinais de instrumentos dedilhados. Em estudo: O violão**. 2015. Orientador: Alexandre José da Silva. 2013. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2015. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=3349276. Acessado em: 03/11/2023.

TEIXEIRA, P. S.; SILVA, A. J.; FEITEIRA, J. F. S. **Avaliação e comparação de características de amortecimento de sinais gerados de diferentes violões**. Cadernos UniFOA, Volta Redonda, n.26, p.17-30, dez. 2014.