



**Universidade do Estado do Rio de Janeiro**

Centro de Tecnologia e Ciências

Instituto de Física Armando Dias Tavares

Vitor Martins Gozzi


**Buracos negros não singulares com a presença de vácuo  
interagente**

Rio de Janeiro

2023

Vitor Martins Gozzi

**Buracos negros não singulares com a presença de vácuo interagente**



Trabalho de Conclusão de Curso apresentado, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Física, ao Instituto de Física Armando Dias Tavares, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Maier

Rio de Janeiro

2023

Ficha elaborada pelo autor através do  
Sistema para Geração Automática de Ficha Catalográfica da Rede Sirius - UERJ

G725      Gozzi, Vitor Martins.  
              Buracos negros não singulares com a presença de  
              vácuo interagente / Vitor Martins Gozzi. - 2023.  
              43 f.

              Orientador: Rodrigo Maier.  
              Monografia apresentada à Universidade do Estado do  
Rio de Janeiro, Instituto de Física, para obtenção do  
grau de bacharel em Física.

              1. Buracos Negros - Monografias. 2. Relatividade  
Geral - Monografias. 3. Equações de Einstein -  
Monografias. I. Maier, Rodrigo. II. Universidade do  
Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Física. III.  
Título.

CDU 53

Vitor Martins Gozzi

**Buracos negros não singulares com a presença de vácuo interagente**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Física, ao Instituto de Física Armando Dias Tavares, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 10 de Fevereiro de 2023.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Rodrigo Maier (Orientador)  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Maria de Fatima Alves Silva  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Rafael Fernandes Aranha  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

---

Prof. Dr. Marcos Vinicius Colaço Gonçalves  
Instituto de Física Armando Dias Tavares – UERJ

Rio de Janeiro

2023

## DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho ao o meu avô José Marçal Martins (in memorian), que não pode estar presente nesse momento tão importante, mas que sempre me apoiou durante a graduação.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha família. Em especial a meu pai, Alvino Gozzi Filho, à minha mãe, Lucia Maria Martins Gozzi e ao meu irmão, Rafael Martins Gozzi, que me moldaram como eu sou hoje. Obrigado por todo o apoio incondicional em qualquer escolha que fiz, por todo o carinho e afeto que vocês nunca deixaram faltar e por todos os suportes, que, em momentos de dúvida e desespero, me ajudaram a trilhar um caminho mais claro.

Agradeço profundamente à minha melhor amiga e minha companheira Helena Ann Pereira, que esteve sempre presente nos meus piores e melhores momentos. Obrigado por ter sido a pessoa que me suportou por tanto tempo. Sem você com certeza toda a minha trajetória acadêmica seria mais difícil. Obrigado por me proporcionar uma vida mais feliz. Sem seu apoio diário, eu não estaria aonde eu estou hoje.

Agradeço também aos meus amigos da faculdade: Diego Rigo, Gustavo Levy, Gabriel Moraes, Mariana Teixeira, Murilo Mano e Patrick Belmont, que viraram verdadeiros irmãos para mim, me proporcionaram infinitos momentos de alegria e de apoio em fases de difíceis decisões. Além disso, agradeço a todos os meus outros amigos, que apesar de não estarem tão presentes na minha vida acadêmica, influenciaram-na de forma positiva.

Gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Rodrigo Maier, ao qual sou eternamente grato pela oportunidade de ser seu aluno de Iniciação Científica. Obrigado por toda a paciência e dedicação durante quase três anos de trabalho, pelas palavras de apoio e incentivo e por ter sido a minha inspiração profissional durante quase toda a graduação.

Por último, mas não menos importante, agradeço a UERJ e a todos os funcionários, que permitem seu funcionamento. Em especial, agradeço a todos os professores que de alguma forma me influenciaram durante esse percurso.

“The study of physics is also an adventure. You will find it challenging, sometimes frustrating, occasionally painful, and often richly rewarding.”

*Hugh D. Young*

## RESUMO

GOZZI, V.G *Buracos negros não singulares com a presença de vácuo interagente*. 2023. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

Nesta monografia temos como objetivo estudar buracos negros na presença de vácuo interagente. Para isso, estudamos um colapso gravitacional de um fluido homogêneo isotrópico com carga junto de uma componente de energia escura em um espaço-tempo tipo FLRW. A partir disso, considerando que há somente uma transferência simples de energia entre a componente de energia escura e a poeira, notamos que uma barreira de potencial infinito pode evitar – para um domínio apropriado do espaço de parâmetros – a singularidade prevista pela Relatividade Geral. Por último, a fim de se obter uma métrica exterior que seja solução das equações de campo de Einstein, fixamos a constante de acoplamento obtendo um espaço-tempo de Reissner–Nordström-de Sitter.

Palavras-chave: Buracos Negros. Relatividade Geral. Equações de Einstein. Teorias alternativas da gravitação.



## ABSTRACT

GOZZI, V.G *Non-singular black holes with the presence of an interacting vacuum*. 2023. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Física) – Instituto de Física Armando Dias Tavares, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.

In this monograph we aim to study black holes in the presence of interacting vacuum. For this, we study a gravitational collapse of an isotropic homogeneous fluid with charge together with a dark energy component in a FLRW type space-time. From this, considering that there is only a simple energy transfer between the dark energy component and the dust, we note that an infinite potential barrier can avoid – for an appropriate domain of parameter space – the singularity predicted by General Relativity. Finally, in order to obtain an outer metric that is a solution of the Einstein field equations, we fix the coupling constant obtaining a Reissner-Nordström-de Sitter space-time.

Keywords: Black Holes. General Relativity. Einstein Equations. Alternatives theories of gravitation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Deslocamento paralelo no espaço euclidiano . . . . .	14
Figura 2	- Deslocamento paralelo no espaço curvilíneo . . . . .	14
Figura 3	- Transporte paralelo sob uma curva fechada . . . . .	18
Figura 4	- Experimento de Eötvös . . . . .	24
Figura 5	- Gráfico $V(a) \times a(t)$ . . . . .	36
Figura 6	- Diagrama de Penrose para o espaço exterior . . . . .	40

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b>	10
1	<b>FORMALISMO MATEMÁTICO</b>	12
1.1	Tensor Métrico	12
1.2	Derivada Covariante	13
1.3	Símbolo de Christoffel	16
1.4	Tensor de Riemann	17
2	<b>EQUAÇÕES DE CAMPO</b>	23
2.1	Princípio de Covariância Geral	23
2.2	Princípio de Equivalência	23
2.3	Equações de Einstein	25
2.4	Aproximação de Campo Fraco	27
3	<b>BURACO NEGRO NÃO-SINGULAR</b>	30
3.1	Solução Interior	30
3.2	Métrica Exterior	36
4	<b>CONCLUSÃO</b>	41
	<b>REFERÊNCIAS</b>	42

## INTRODUÇÃO

A Relatividade Geral, formulada por Albert Einstein, é a teoria que obteve maior sucesso em descrever a interação gravitacional. Desde sua formulação em 1915, a Relatividade Geral forneceu uma descrição que a gravitação Newtoniana, considerada a mais bem formulada até então, não havia feito. Para isso, Einstein partiu de sua teoria da Relatividade Restrita, e revolucionou a concepção do que seria a gravidade, trazendo uma nova perspectiva fundamentada na geometrização do espaço-tempo. A partir dessa ideia, foram criadas as equações de Einstein, relacionando tal perspectiva à distribuição de matéria.

Após alguns anos, tais equações foram resolvidas por diversos físicos. Um deles foi Karl Schwarzschild, que em 1916, descreveu um campo gravitacional estático no vazio gerado por uma distribuição de matéria com simetria esférica. Tempos depois soluções incluindo carga e momento angular foram descobertas, sendo, a primeira (para um campo gravitacional com matéria carregada), descoberta por Hans Reissner e Gunnar Nordström, em 1918 e a última (para um campo gravitacional com rotação e carga), por Roy Patrick Kerr e Ezra Newman, em 1965. Além disso, Kerr também publicou um trabalho, em 1963, considerando somente o caso com rotação. Outras importantes soluções também foram desenvolvidas para explicar alguns modelos de universo, como a solução Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker, conhecida como modelo FLRW, que explica o Universo de forma homogênea e isotrópica em expansão. Tais resultados foram amplamente utilizados pelos estudos seguintes na área da gravitação.

Uma significativa previsão da Relatividade Geral foi a formação de buracos negros, extensivamente estudada pelo físico Roger Penrose (PENROSE, 1965), onde corpos com massas suficientemente grandes, inevitavelmente, colapsam até formarem o chamado buraco negro. Esse objeto, por sua vez, é caracterizado como uma região no espaço-tempo, cuja fronteira é denominada horizonte de eventos, na qual o campo gravitacional é tão intenso que nada, nem mesmo a luz, pode escapar. Os buracos negros podem ser divididos de acordo com três propriedades: massa, rotação e carga. Cada propriedade gera consequências diferentes no espaço-tempo exterior e nas características desses objetos. Dito isto, a Relatividade Geral prevê quatro tipos de buracos negros clássicos: Buracos Negros de Schwarzschild, que possuem apenas massa, Buracos Negros de Reissner-Nordström, que possuem massa e carga, Buracos Negros de Kerr, que possuem massa e rotação e Buracos Negros de Kerr-Newman, que possuem massa, carga e momento angular.

Outra importante característica que define os buracos negros é a singularidade, a qual consiste em um domínio no qual quantidades físicas divergem. A singularidade pode ser definida matematicamente como ponto de densidade e curvatura infinitas e é encontrada naturalmente em diversas soluções de buracos negros já bem estabelecidas

pela Relatividade Geral, apesar de não possuir significado físico robusto, o que configura uma patologia para essa teoria.

É válido ressaltar, no entanto, que a teoria da Relatividade Geral apresenta outros problemas, como a falta de solução interior para os buracos negros de Reissner-Nordström, Kerr e Kerr-Newman, o que a torna insuficiente para descrever por completo todos os tipos de buracos negros. A questão já mencionada da existência da singularidade dentro do horizonte de eventos é um grande problema da Relatividade Geral e permeia as quatro soluções clássicas citadas. Por conta disso, diversos pesquisadores propuseram diferentes modelos na tentativa de se resolver tal questão.

Nesse cenário, foram propostos modelos de Buracos Negros Não Singulares nos quais, através de certas considerações e atribuições, a singularidade é evitada. Por exemplo, (FROLOV; MARKOV; MUKHANOV, 1989) propõem evitar a singularidade dentro do horizonte de eventos através de um ricochete de de Sitter; (BORDE, 1997) propõe que, para espaços-tempos que satisfazem a condição de energia fraca, é possível obter buracos negros sem singularidades caso haja uma mudança de topologia. Outro modelo utilizado é o das teorias  $f(R)$ , que encontram para um domínio de parâmetros uma solução em que a singularidade é substituída por um buraco de minhoca (OLMO; RUBIERA-GARCIA, 2015). Neste trabalho, é proposta a utilização de uma componente de vácuo interagente, uma vez que esta pode gerar uma barreira de potencial infinito que evitará a formação de singularidade (BRUNI; MAIER; WANDS, 2022).

Afim de seguir tal modelo, tomamos como base (MAIER, 2020), que trata o caso especial de Buracos Negros com carga e sem rotação na presença de uma componente de vácuo interagente. No capítulo 1 apresentamos uma descrição sucinta de diversos conceitos matemáticos utilizados pela Relatividade Geral, sendo eles: tensor métrico, derivada covariante, símbolo de Christoffel e tensor de Riemann. Já no capítulo 2 visamos relacionar os conceitos descritos anteriormente aplicando-os à teoria da Relatividade geral, formulando seus conceitos e explicitando as equações mais importantes. No capítulo 3 nos aprofundamos no modelo apresentado em (MAIER, 2020), descrevendo em detalhes o colapso gravitacional do modelo em questão. Por fim, no capítulo 4, apresentamos as conclusões obtidas ao longo do estudo.

## 1 FORMALISMO MATEMÁTICO

Neste capítulo iremos retratar o formalismo matemático para a construção da Relatividade Geral nos preocupando em expressar as ideias geométricas em que essa teoria se consolida. Para isso, desconsideramos a ideia de espaço euclidiano comumente utilizada e passamos a considerar um espaço pseudo-riemanniano em 4 dimensões, no qual uma métrica e uma conexão explicitam a geometria do espaço em questão.

### 1.1 Tensor Métrico

Para começar a falar sobre tensor métrico, deve-se entender o que é um produto escalar entre dois quadrivetores em um espaço pseudo-euclidiano 4-dimensional. Isto pode ser visto da seguinte forma:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^\alpha e_\alpha) \cdot (b^\beta e_\beta) = (e_\alpha \cdot e_\beta) a^\alpha b^\beta = \eta_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta. \quad (1)$$

onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são quadrivetores com suas componentes dadas por  $a^\alpha$  e  $b^\beta$  respectivamente nas bases  $e_\alpha$  e  $e_\beta$  de um determinado sistema de coordenadas. Note que foi possível definir o produto escalar das bases dos quadrivetores como as componentes de um tensor de segunda ordem. Em coordenadas cartesianas, é possível definir esse tensor de segunda ordem como:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Essas componentes são nomeadas como métrica de Minkowski. Esta métrica, por sua vez, gera uma geometria plana para o espaço pseudo-euclidiano. Neste contexto, definimos a distância infinitesimal entre dois pontos através do elemento de linha definido por:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (3)$$

Note que  $ds$  corresponde à distância infinitesimal entre dois pontos quaisquer, e  $dx$  é o deslocamento infinitesimal. Considerando um espaço pseudo-euclidiano, uma pergunta que naturalmente surge é: como seria para o caso pseudo-riemanniano? Podemos retratar

a equação (3) de forma mais geral, como:

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j, \quad (4)$$

em que  $g_{ij}(x)$  são as componentes do tensor métrico. Esse objeto, como explicitado em (BERGMANN, 1976), se transforma como um tensor de segunda ordem, além de descrever as propriedades geométricas do sistema de coordenadas curvilíneo. Portanto, podemos estender essa ideia e observar que a equação (3) é um caso específico da equação (4), no qual consideramos um espaço plano pseudo-euclidiano.

Considerando todas essas informações a respeito do Tensor Métrico, podemos explicitar algumas características importantes, como:

1. Subir e descer índices: a componente de um vetor covariante pode ser obtida, multiplicando a componente de um vetor contravariante pelo Tensor Métrico covariante;

$$a_\alpha = g_{\alpha\beta} a^\beta. \quad (5)$$

A componente de um vetor contravariante pode ser obtida, multiplicando a componente de um vetor covariante pelo tensor métrico contravariante;

$$a^\alpha = g^{\alpha\beta} a_\beta. \quad (6)$$

2. Simetria indicial: em um espaço pseudo-riemanniano o tensor métrico é simétrico;

$$g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}. \quad (7)$$

3. Contração indicial: considerando que o determinante de  $g_{\alpha\beta}(x)$  não seja igual a 0 (BERGMANN, 1976), podemos escrever

$$g_{\beta\alpha} g^{\gamma\beta} = \delta_\gamma^\alpha, \quad (8)$$

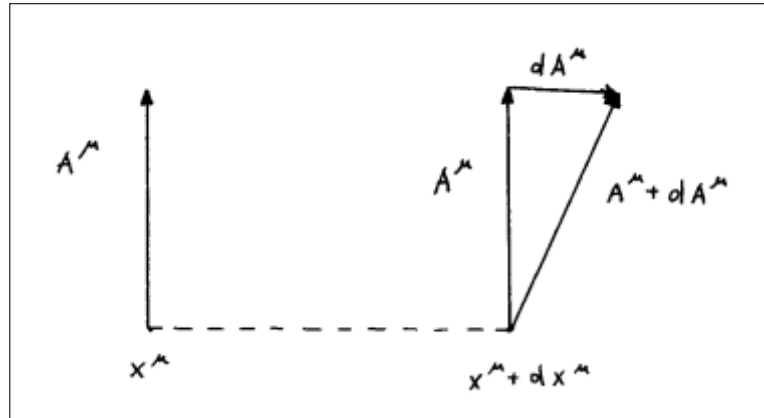
onde  $\delta_\gamma^\alpha$  é a delta de Kronecker.

## 1.2 Derivada Covariante

Diferentemente do caso euclidiano, em um espaço pseudo-riemanniano, a derivada parcial de um vetor qualquer não representa a taxa de variação de um campo ao longo de uma direção e não é, em geral, um tensor sob uma transformação geral de coordenadas. Portanto, como demonstrado em (SABBATA; GASPERINI, 1986), iremos generalizar a

noção de diferenciação, considerando um deslocamento paralelo infinitesimal de um vetor qualquer, até a posição de um outro vetor com uma variação infinitesimal em relação ao primeiro. Podemos ver, mais explicitamente, na figura 1 e na figura 2, os casos em que esse deslocamento é feito em um espaço euclidiano e em um espaço pseudo-riemanniano.

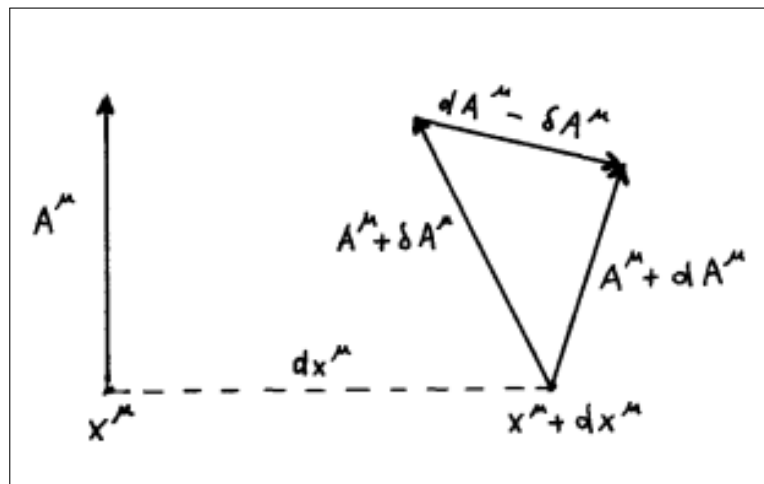
Figura 1 - Deslocamento paralelo no espaço euclidiano



Legenda: Deslocamento paralelo infinitesimal do vetor  $A^\mu$  e o vetor  $A^\mu + dA^\mu$  em um espaço sem curvatura.

Fonte: (SABBATA; GASPERINI, 1986)

Figura 2 - Deslocamento paralelo no espaço curvilíneo



Legenda: Deslocamento infinitesimal do vetor  $A^\mu$  indo em  $A^\mu + \delta A^\mu$  e o vetor  $A^\mu + dA^\mu$  em um espaço com curvatura.

Fonte: (SABBATA; GASPERINI, 1986)

Note que na figura 1, pelo espaço ser euclidiano, o deslocamento  $dx^\mu$  do vetor  $A^\mu$  não altera seu sentido de orientação; por outro lado, se considerarmos a figura 2, pelo espaço ser curvilíneo, esse mesmo deslocamento acarretará numa alteração no sentido de orientação do vetor  $A^\mu$ , sendo expresso após o deslocamento, como  $A^\mu + \delta A^\mu$ .



Para que esse deslocamento seja considerado paralelo o vetor transportado deve ser igual ao original. Portanto, no caso da figura 1, é trivial ver que o deslocamento foi feito paralelamente à superfície. Já no caso da figura 2, podemos encontrar a seguinte relação:

$$DA^\mu = -\delta A^\mu, \quad (9)$$

onde  $DA^\mu$  é a diferença total entre os dois vetores – transportado e original. Portanto, como feito em (BERGMANN, 1976), a diferença infinitesimal nas componentes de um vetor transportado são funções bilineares das componentes do vetor original e das componentes do deslocamento infinitesimal. Por fim, é possível definir a seguinte equação:

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta, \quad (10)$$

em que a função  $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$  é conhecida como conexão afim, em que sua lei de transformação é dada por:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\mu} = \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\prime\alpha}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\prime\beta}} \Gamma_{\gamma\lambda}^\nu + \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x^{\prime\alpha} \partial x^{\prime\beta}}. \quad (11)$$

Note que a conexão afim não se transforma como um tensor de terceira ordem devido ao segundo termo da equação (11). Portanto, para que encontremos um objeto tensorial que faça o papel da derivada para espaços curvos, definimos um objeto denominado derivada covariante, que é dado por:

$$\nabla_\beta A^\mu = \partial_\beta A^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha. \quad (12)$$

É possível demonstrar que a derivada covariante é invariante sob uma transformação geral de coordenadas se considerarmos o incremento

$$DA^\mu = dA^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\nu}} dA^{\prime\nu} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\prime\gamma} \partial x^{\prime\lambda}} A^{\prime\gamma} dx^{\prime\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\nu}} A^{\prime\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\sigma}} dx^{\prime\sigma}. \quad (13)$$

Ao se utilizar a transformação geral da conexão, dada pela equação (11), é possível, então, chegar a:

$$DA^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\nu}} (dA^{\prime\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\prime\nu} A^{\prime\alpha} dx^{\prime\beta}) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\prime\nu}} DA^{\prime\nu}. \quad (14)$$

Por fim, a derivada covariante é de fato um objeto válido para representar a derivada em um sistema de coordenadas curvilíneo. Em casos em que o sistema de coordena-

das é cartesiano, devemos recuperar a noção de derivada já conhecida, como explicitado em (SCHUTZ, 2009).

### 1.3 Símbolo de Christoffel

O símbolo de Christoffel é um caso específico da conexão afim. Para que isso seja representado formalmente, conforme feito em (SCHUTZ, 2009), vamos definir as duas propriedades que caracterizam tal situação. Em geral, a conexão afim não é simétrica nos seus índices covariantes, ou seja,  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \neq \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$ , portanto vamos definir um objeto denominado “torção”.

$$T_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha. \quad (15)$$

No caso em que a torção é nula, ou seja, a conexão é simétrica em seus índices covariantes, é possível caracterizar a primeira propriedade do símbolo de Christoffel. Outra propriedade seria a compatibilidade da métrica, que pode ser definida como:

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} = 0. \quad (16)$$

Podemos dizer, então, que a conexão é compatível com a métrica, somente se a equação (16) é satisfeita em todos os pontos do espaço.

Tendo em vista essas duas características é possível definir o símbolo de Christoffel como a conexão afim. Para isso, vamos seguir os passos aplicitados em (SABBATA; GASPERINI, 1986), visando defini-lo por completo. Portanto, partindo da equação (16) e utilizando a definição de derivada covariante, dada pela equação (12), temos:

$$\nabla_\beta g_{\mu\nu} = \partial_\beta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\beta\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha g_{\mu\alpha} = 0. \quad (17)$$

Tomando permutações cíclicas dos índices covariantes temos:

$$\begin{aligned} \nabla_\beta g_{\mu\nu} &= \partial_\beta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\beta\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha g_{\mu\alpha} = 0, \\ \nabla_\mu g_{\nu\beta} &= \partial_\mu g_{\nu\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha g_{\nu\alpha} = 0, \\ \nabla_\nu g_{\beta\mu} &= \partial_\nu g_{\beta\mu} - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha g_{\beta\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Subtraindo as duas últimas da primeira equação em (18), temos:

$$\partial_\beta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\beta\mu}^\alpha g_{\alpha\nu} - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha g_{\mu\alpha} - (\partial_\mu g_{\nu\beta} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\alpha g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha g_{\beta\alpha}) = 0. \quad (19)$$

Utilizando-se da propriedade de simetria, é possível reescrever a equação (19), como:

$$(\partial_\beta g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\nu g_{\beta\mu}) + 2\Gamma_{\mu\nu}^\alpha g_{\alpha\beta} = 0. \quad (20)$$

Por fim, podemos definir o símbolo de Christoffel em função da métrica, como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (21)$$

O símbolo de Christoffel tem uma importância fundamental para a gravitação, pois ao identificarmos que é possível caracterizar a conexão a partir dele, podemos, então, argumentar que o espaço retratado é caracterizado por uma geometria pseudo-Riemanniana que, por sua vez, satisfaz a teoria da Relatividade Geral. Todavia, as propriedades do símbolo de Christoffel não necessariamente precisam ser respeitadas, desta forma, teorias alternativas da gravitação aparecem com o intuito de explicar a conexão afim de maneira diferente, como por exemplo:

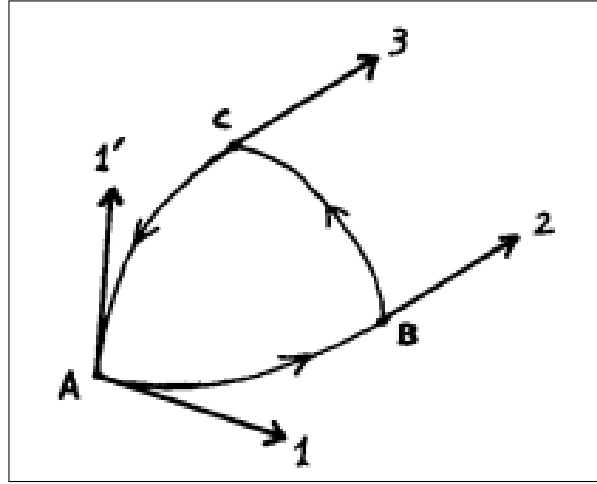
- Teoria de Weyl, em que a conexão não é compatível com a métrica  $\nabla_\beta g_{\mu\nu} \neq 0$ ;
- Teoria de Einstein-Cartan, em que a torção não é zero;  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \neq \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$
- Teoria métrico-afim, em que as duas propriedades não são respeitadas.

#### 1.4 Tensor de Riemann

Para começarmos a falar sobre o tensor de curvatura, ou tensor de Riemann, é necessário entender o que é o transporte paralelo. O transporte paralelo é o conceito de mover um vetor, paralelamente, ao longo de sua trajetória, como visto em (SABBATA; GASPERINI, 1986). Ao se considerar esse transporte em espaços curvos, tal deslocamento acaba por não ser trivial, como seria se considerássemos um espaço euclidiano, ou seja, o transporte paralelo de um vetor em espaços curvos é, necessariamente, dependente do caminho percorrido por esse vetor.

Para retratarmos melhor essa ideia, consideraremos um transporte paralelo dado pela figura 3, na qual o vetor representado pelo número 1 se transporta paralelamente pela curva fechada ABC. Note que ao finalizar seu transporte e retornar ao seu ponto de origem, o vetor 1 tem sua direção e sentido alterado devido ao transporte paralelo em um espaço com curvatura.

Figura 3 - Transporte paralelo sob uma curva fechada



Legenda: Deslocamento paralelo do vetor  $A^\mu$  sob uma curva fechada em um espaço curvo

Fonte: (SABBATA; GASPERINI, 1986)

Diante disso, o tensor de Riemann representa a curvatura do espaço em questão e pode ser definido pela variação do vetor  $A_\mu$ , durante o transporte paralelo sob uma curva geodésica infinitesimal fechada  $\gamma$ . Traduzindo para o linguajar matemático, temos:

$$\Delta A^\mu = \oint_\gamma \delta A^\mu. \quad (22)$$

Relacionando de acordo com a equação (10), temos:

$$\oint_\gamma \delta A^\mu = - \oint_\gamma \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\alpha dx^\beta. \quad (23)$$

Utilizando a versão quadridimensional do Teorema de Stokes, demonstrada em (LANDAU; LIFSHITZ, 1987), podemos reescrever a equação (23) como:

$$\oint_\gamma \delta A^\mu = -\frac{1}{2} \int df^{\alpha\nu} [(\partial_\alpha (\Gamma_{\nu\beta}^\mu A^\beta) - \partial_\nu (\Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\beta))]. \quad (24)$$

onde  $f$  é o valor infinitesimal da área fechada pelo contorno. Portanto, aplicando a regra do produto e relacionando novamente de acordo com a equação (10), obtemos:

$$\oint_\gamma \delta A^\mu = -\frac{1}{2} \int df^{\alpha\nu} [\partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu A^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\sigma}^\beta A^\sigma - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu A^\beta + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\beta A^\sigma]. \quad (25)$$

Reorganizando essa equação e redefinindo os índices mudos de forma apropriada, é possível reescrever a equação (22), como:

$$\Delta A^\mu = -\frac{1}{2} \int df^{\alpha\nu} [\partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma] A^\beta. \quad (26)$$

Considerando um contorno fechado, é possível calcular a integral substituindo a função no integrandando por seu valor avaliado em um ponto dentro da área fechada e retirando-a da integral. Diante disso, podemos reescrever a equação (26) como:

$$\Delta A^\mu = -\frac{1}{2} R_{\nu\alpha\beta}^\mu A^\beta \Delta f^{\alpha\nu}. \quad (27)$$

Feito isso, podemos definir o tensor de curvatura.

$$R_{\nu\alpha\beta}^\mu = \partial_\alpha \Gamma_{\nu\beta}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma. \quad (28)$$

Esse tensor também pode ser obtido, tomando o comutador de duas derivadas covariantes, como feito em (BERGMANN, 1976). Outro objeto importante a ser definido é o tensor de Ricci, que por sua vez é a versão de segunda ordem do tensor de Riemann. Esse tensor pode ser obtido, tomando a contração do primeiro com o terceiro índice:

$$R_{\nu\beta} = R_{\nu\mu\beta}^\mu = \partial_\mu \Gamma_{\nu\beta}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\mu\beta}^\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu \Gamma_{\nu\beta}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\sigma. \quad (29)$$

Por fim, um último objeto, denominado escalar de Ricci, pode ser obtido ao contrair-se o tensor de Ricci, após ter sido feito o levantamento do primeiro índice de acordo com a equação (6), ou seja:

$$R = R_{\mu\beta} g^{\mu\beta}. \quad (30)$$

Definidos esses objetos, é importante explicitar as propriedades vinculadas ao tensor de curvatura, a fim de construir por completo sua noção físico-matemática.

Propriedades do Tensor de Curvatura:

1. Curvatura Nula: Ao considerar um transporte paralelo de um vetor em uma curva fechada arbitrária, temos que, se o vetor retornar a seu ponto de origem sem alterações, então:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0. \quad (31)$$

Diante disso, a equação (31) representa um espaço sem curvatura, ou seja, um espaço plano.

2. Simetria dos índices: Ao colocar todos os índices no mesmo nível, ou seja, aplicar a métrica ao Tensor de Riemann, afim de abaixar o índice contravariante (5), podemos fazer as seguintes análises a respeito da simetria de seus índices:

(a) Índices simétricos: ao trocar índices aos pares.

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (32)$$

(b) Índices antissimétricos: ao trocar índices subsequentes.

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}, \quad R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\mu\nu\beta\alpha}. \quad (33)$$

3. Rotações cíclicas dos índices covariantes: ao se fazer uma rotação cíclica dos índices covariantes das componentes do tensor de curvatura e somar todas as possíveis combinações, obtemos a seguinte expressão:

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} + R^\mu_{\alpha\beta\nu} + R^\mu_{\beta\nu\alpha} = 0. \quad (34)$$

É trivial ver que, ao abrir o tensor de Riemann em termos dos símbolos de Christoffel e utilizar o fato destes últimos serem simétricos em seus índices covariantes, é possível obter o resultado da equação (34).

4. Identidade de Bianchi: Ao se tomar a derivada covariante do comutador de duas derivadas covariantes de um vetor  $A^\mu$  é possível obter a seguinte equação:

$$\nabla_\gamma(\nabla_\nu\nabla_\alpha A^\mu - \nabla_\alpha\nabla_\nu A^\mu) = \nabla_\gamma(R^\mu_{\nu\alpha\beta}A^\beta). \quad (35)$$

Portanto, tomando rotações cíclicas dos índices covariantes e somando as equações, temos:

$$\begin{aligned}
& \nabla_\gamma \nabla_\nu \nabla_\alpha A^\mu - \nabla_\gamma \nabla_\alpha \nabla_\nu A^\mu - \nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\beta} A^\beta - R^\mu_{\nu\alpha\beta} \nabla_\gamma A^\beta + \\
& + \nabla_\nu \nabla_\alpha \nabla_\gamma A^\mu - \nabla_\nu \nabla_\gamma \nabla_\alpha A^\mu - \nabla_\nu R^\mu_{\alpha\gamma\beta} A^\beta - R^\mu_{\alpha\gamma\beta} \nabla_\nu A^\beta + \\
& + \nabla_\alpha \nabla_\gamma \nabla_\nu A^\mu - \nabla_\alpha \nabla_\nu \nabla_\gamma A^\mu - \nabla_\alpha R^\mu_{\gamma\nu\beta} A^\beta - R^\mu_{\gamma\nu\beta} \nabla_\alpha A^\beta = 0.
\end{aligned} \tag{36}$$

Dada essa equação, é possível utilizar o comutador de duas derivadas covariantes, atuando em um tensor de segunda ordem definido por:

$$(\nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta) B^\nu_\mu = R^\nu_{\beta\alpha\sigma} B^\sigma_\mu - R^\sigma_{\beta\alpha\mu} B^\nu_\sigma. \tag{37}$$

Analogamente, como a derivada covariante de um vetor se comporta tal qual um tensor de segunda ordem, é possível escrever a seguinte equação:

$$(\nabla_\beta \nabla_\alpha - \nabla_\alpha \nabla_\beta) \nabla_\mu A^\nu = R^\nu_{\beta\alpha\sigma} \nabla_\mu A^\sigma - R^\sigma_{\beta\alpha\mu} \nabla_\sigma A^\nu. \tag{38}$$

Desse modo, é possível reorganizar e reescrever a equação (36), como:

$$\begin{aligned}
& R^\mu_{\gamma\nu\sigma} \nabla_\alpha A^\sigma - R^\sigma_{\gamma\nu\alpha} \nabla_\sigma A^\mu + R^\mu_{\nu\alpha\sigma} \nabla_\gamma A^\sigma - R^\sigma_{\nu\alpha\gamma} \nabla_\sigma A^\mu + R^\mu_{\alpha\gamma\sigma} \nabla_\nu A^\sigma - \\
& - R^\sigma_{\alpha\gamma\nu} \nabla_\sigma A^\mu - \nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\sigma} A^\sigma - R^\mu_{\nu\alpha\sigma} \nabla_\gamma A^\sigma - \nabla_\nu R^\mu_{\alpha\gamma\sigma} A^\sigma - R^\mu_{\alpha\gamma\sigma} \nabla_\nu A^\sigma - \\
& - \nabla_\alpha R^\mu_{\gamma\nu\sigma} A^\sigma - R^\mu_{\gamma\nu\sigma} \nabla_\alpha A^\sigma = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Finalmente, após algum algebrismo, e utilizando a propriedade dada pela equação (34), é possível obter a Identidade de Bianchi, definida por:

$$\nabla_\gamma R^\mu_{\nu\alpha\sigma} + \nabla_\nu R^\mu_{\alpha\gamma\sigma} + \nabla_\alpha R^\mu_{\gamma\nu\sigma} = 0. \tag{40}$$

A partir disso, um objeto importante pode ser obtido por meio da contração indicial dessa identidade. Para isso, iremos substituir o índice  $\alpha$  por  $\mu$  e utilizar a propriedade (2b)

$$\nabla_\gamma R_{\nu\sigma} - \nabla_\nu R_{\gamma\sigma} + \nabla_\mu R^\mu_{\gamma\nu\sigma} = 0. \tag{41}$$

Em seguida, levantamos o índice  $\sigma$  e obtemos:

$$\nabla_\gamma R_\nu^\sigma - \nabla_\nu R_\gamma^\sigma + \nabla_\mu R^\mu_{\gamma\nu}{}^\sigma = 0. \quad (42)$$

Utilizando a propriedade (2b) no terceiro termo e contraindo os índices  $\sigma$  e  $\nu$  encontramos:

$$\nabla_\gamma R - 2\nabla_\nu R^\nu_{\gamma} = 0. \quad (43)$$

Enfim, multiplicando pela métrica  $g^{\mu\gamma}$  e redefinindo os índices, temos:

$$\nabla_\nu (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R) = 0. \quad (44)$$

O termo entre parênteses da equação (44) é denominado tensor de Einstein que será visto com mais detalhes adiante.



## 2 EQUAÇÕES DE CAMPO

A Teoria da Relatividade Geral traz um significado geométrico para a gravidade, sendo esse significado a curvatura do espaço-tempo. Dessa maneira, nesse capítulo, vamos retratar o significado físico da Relatividade Geral, afim de contextualizar o capítulo anterior com a gravitação.

### 2.1 Princípio de Covariância Geral

O princípio de covariância geral, proposto por Einstein, se baseia na ideia de que as leis da natureza devem ser as mesmas para quaisquer sistemas de coordenadas. Este princípio estende para observadores não inerciais, a ideia da Relatividade Especial, que diz que todos os observadores inerciais são equivalentes. Para que a ideia de Einstein seja satisfeita, é necessário que a equação para o campo gravitacional seja a mesma em qualquer sistema de coordenadas – devem ter uma forma tensorial.

### 2.2 Princípio de Equivalência

Para começarmos a falar sobre esse princípio, é necessário entendermos o conceito de massa. Em primeiro lugar, temos a massa inercial que é responsável por resistir à aceleração dentro do contexto da segunda lei de Newton. Porém, existe outro tipo de massa, denominada massa gravitacional, que é, por sua vez, uma característica intrínseca da partícula – corpos com diferentes massas gravitacionais caem com a mesma aceleração. A partir dessa diferenciação, o princípio de equivalência busca estabelecer uma relação de igualdade entre essas duas massas. Para observar se tal princípio é válido, Eötvös fez um experimento que consistia em suspender dois materiais com a mesma massa gravitacional em uma balança de torção, representada na figura 4.

Figura 4 - Experimento de Eötvös



Legenda: Balança de Torsão usada por Loránd Eötvös  
afim de testar a relação entre as massas  
gravitacional e inercial

Fonte: (Nobili, 2001)

Por conta da ausência de torque na balança durante o experimento, foi possível obter um resultado satisfatório capaz de validar a ideia de que a massa gravitacional e a massa inercial são iguais.

A igualdade entre essas duas massas gera, consequentemente, a não diferenciação entre a ação de um campo gravitacional e a aceleração inercial. Nesse sentido, um referencial inercial na presença de um campo gravitacional pode ser equivalente a um referencial não inercial na ausência de um campo gravitacional. Para ilustrar isso de forma mais clara, vamos considerar o famoso experimento mental do elevador de Albert Einstein. Nesse experimento, Einstein considerou um homem em um elevador fechado. Num primeiro momento, o elevador se encontra parado em uma região, onde um campo gravitacional atua sobre ele. Em seguida, o homem solta um objeto e repara que este cai com uma aceleração correspondente ao campo. Num segundo momento, esse mesmo elevador é levado para uma região sem a presença de um campo gravitacional, porém o elevador é acelerado para cima numa aceleração correspondente ao campo gravitacional anterior, ou seja, o elevador deixou de ser um referencial inercial. Com isso, o homem solta o mesmo objeto do caso anterior e repara que este cai da mesma forma como se ainda estivesse sob a ação do campo. Enfim, o homem nesses dois experimentos é incapaz de distinguir localmente se ele está sob a ação de um campo gravitacional ou se está em um referencial não inercial. Dito isso, é possível incluir no princípio de equivalência, a ideia de que efeitos inerciais e efeitos gravitacionais são indistinguíveis localmente.

Porém o experimento do elevador ainda não traz uma diferença entre o princípio de equivalência de Einstein e de Newton, dado que esse experimento pode ser reproduzido em ambos regimes, newtoniano e einsteiniano. Portanto, para explicitar essa diferença devemos considerar os grupos de simetria de cada um deles. Desta forma para o princípio de equivalência newtoniano, localmente, o grupo de simetria é galileano, ou seja, as transformações que deixam as equações da física invariantes são transformações de Galileu. Já para o princípio de equivalência einsteiniano, dentro do elevador, o grupo de simetria é lorentziano, ou seja, as transformações que deixam as equações da física invariantes são transformações de Lorentz.

Consideremos finalmente a equação de movimento de uma partícula livre em relação a um observador inercial dentro de um elevador de Einstein:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (45)$$

onde  $\tau$  é o tempo próprio. Diante de um referencial não inercial as equações de movimento deixam de ser representadas pela equação (45). Para isso é necessário aplicar uma transformação de coordenadas  $x^\mu(\xi)$  reescrevendo a equação (45) com um termo adicional correspondendo ao símbolo de Christoffel:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \frac{d\xi^\beta}{d\tau} = 0. \quad (46)$$

Note que o segundo termo da equação (46) pode ser interpretado como a presença do campo gravitacional através do princípio de equivalência. Essa equação, denominada “equação geodésica”, é caracterizada por ser a trajetória com a menor distância entre dois pontos em um espaço com curvatura. (BERGMANN, 1976) (SABBATA; GASPERINI, 1986)

### 2.3 Equações de Einstein

A Relatividade Geral descreve a gravidade como a curvatura do espaço-tempo proporcionada por uma distribuição de matéria. Essa teoria se baseia no formalismo matemático e nos princípios já mencionados, porém ainda é necessário fazer mais uma importante consideração para sua formulação completa. Dado que a Relatividade Geral visa descrever a interação gravitacional entre corpos, é necessário considerar então que, em algum certo regime, essa teoria deve coincidir com a equação de Poisson, que descreve a gravitação, considerando um campo fraco e um potencial newtoniano:

$$\nabla^2\psi = 4\pi G\rho. \quad (47)$$

Para se obter as equações de Einstein, que descrevem a gravitação através da Relatividade Geral, é necessário construir uma generalização relativística da equação (47). Para isso devemos considerar, dentro da perspectiva da Relatividade Geral, dois objetos que correspondam, respectivamente, ao potencial gravitacional e à densidade de energia da matéria. Primeiramente, pelo princípio de equivalência, temos que é possível relacionar a métrica ao potencial gravitacional partindo da observação de que o divergente desse potencial pode ser relacionado à aceleração, dado que a força gravitacional corresponde a uma força conservativa. A aceleração, por sua vez, pode ser relacionada ao símbolo de Christoffel, como visto pela equação de movimento (46). Diante disso, utilizando a equação (21), podemos, finalmente, considerar que a derivada segunda da métrica corresponde ao laplaciano do potencial gravitacional. Por outro lado, a densidade de energia da matéria pode ser estendida para o tensor momento-energia, via princípio de covariância geral. Por fim, é razoável considerar que as derivadas segundas da métrica possuem uma relação de proporcionalidade com o tensor momento-energia, concordando, portanto, com a equação de Poisson.

Estendendo essa ideia, é possível identificar que o objeto responsável por carregar as derivadas segundas da métrica é o tensor de curvatura de Riemann. Portanto, para que ele seja compatível com o tensor momento-energia, o tensor de curvatura deve ser de segunda ordem, ou seja, devemos considerá-lo como o tensor de Ricci. Desta forma, podemos estabelecer a seguinte equação:

$$R^{\mu\nu} \propto T^{\mu\nu}. \quad (48)$$

Por outro lado, essa equação ainda não é completamente suficiente, devido à lei de conservação do tensor momento-energia, que é expressa por:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (49)$$

de forma que seria esperado que o  $\nabla_\nu R^{\mu\nu}$  fosse nulo, porém isso não é verdade. Portanto, é necessário construir um outro objeto que seja dimensionalmente compatível e respeite a lei de conservação do tensor momento-energia. Para tal, consideramos a identidade de Bianchi (44) que corresponde a todas essas expectativas, possibilitando reescrever a equação (48) como:

$$G^{\mu\nu} = \kappa^2 T^{\mu\nu}. \quad (50)$$

Dessa forma, a equação (50) é conhecida como Equação de Einstein, em que  $\kappa^2$  é uma constante de acoplamento que retorna à gravitação newtoniana no limite de campo fraco, e  $G_{\mu\nu}$  é o tensor de Einstein que corresponde à:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R. \quad (51)$$

Finalmente, a equação (50) é responsável por descrever como a distribuição da matéria deforma a curvatura do espaço-tempo, ou também, dada à curvatura deformada, tal equação permite identificar como a matéria está distribuída. Em suma, essa equação traz um caráter geométrico à gravitação.

No afã de se obter um modelo de universo estático, Einstein alterou a equação (50), acrescentando um termo constante,  $\Lambda$ , denominado “constante cosmológica”, resultando na seguinte equação de campo:

$$G_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (52)$$

Tempos depois, a partir de observações feitas pelo telescópio Hubble, através das quais confirmou-se que o Universo estava em expansão, o termo da constante cosmológica foi abandonado. Após esse fatídico acontecimento, Einstein abandonou de vez o uso dessa constante e considerou-a o "maior erro de sua vida". Somente depois de observações de que o Universo se expande de forma acelerada (RIESS et al., 1998), houve a volta da necessidade de acrescentar um termo que corresponderia à energia escura, a fim de tornar compatível a Relatividade Geral com as observações feitas. Atualmente o modelo de universo em expansão acelerada, denominado “modelo  $\Lambda$ CDM”, é o mais utilizado para o estudo do Universo em larga escala. No entanto, alguns outros modelos ainda consideram o acréscimo de uma componente que substitui a constante cosmológica, com a finalidade de explicar problemas não resolvidos na gravitação e na cosmologia.

## 2.4 Aproximação de Campo Fraco

Como mencionado na seção anterior, as equações de Einstein retornam à equação de Poisson (47), caso levemos em consideração certas características como: baixas velocidades, campo estático e campo fraco. Logo, para formalizarmos isso com mais detalhe,

iremos determinar a constante  $\kappa^2$ , a fim de compatibilizar a gravitação newtoniana com a gravitação via Relatividade Geral. (CHENG, 2009) (SABBATA; GASPERINI, 1986)

Primeiramente, podemos reescrever as equações de Einstein (50) da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = \kappa^2(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T). \quad (53)$$

Em seguida, consideramos o regime de baixas velocidades ( $dx^i \ll c/dt$ ), ou seja, somente as componentes temporais serão consideradas. A equação (53), portanto, reescreve-se como:

$$R_{00} = \kappa^2(T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T). \quad (54)$$

Tomando agora o traço do tensor momento-energia como  $T = T_{00}g^{00}$ , podemos reescrever a equação (54) por:

$$R_{00} = \frac{1}{2}\kappa^2 T_{00}. \quad (55)$$

Para representarmos o limite do campo gravitacional, é necessário abrir o tensor de Ricci em termos da métrica

$$R_{00} = g^{\mu\nu} R_{\mu 0 \nu 0} = g^{ij} R_{i 0 j 0}. \quad (56)$$

Note que, por questões de simetria, os termos  $R_{0000}$  e  $R_{i000}$  se cancelam. Dessa maneira, podemos abrir a equação (56) da seguinte forma:

$$R_{00} = R_{0i0}^i = \partial_i \Gamma_{00}^i - \partial_0 \Gamma_{i0}^i + \Gamma_{i\sigma}^i \Gamma_{00}^\sigma - \Gamma_{0\sigma}^i \Gamma_{i0}^\sigma. \quad (57)$$

Para o limite em que o campo gravitacional é estático, ou seja, os termos de derivadas temporais somem, torna-se possível reescrever a equação (57) como:

$$R_{00} = \frac{1}{2}g^{ij} \nabla_i \nabla_j g_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 g_{00}. \quad (58)$$

Tomando o limite de campo fraco, no qual assumimos uma métrica que possui pequenas correções para a métrica de Minkowsk, temos:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (59)$$

De forma que a componente temporal da métrica é dada por:

$$g_{00} = 1 - \frac{2}{c^2}\phi. \quad (60)$$

Definido o limite de campo fraco, podemos substituir a equação (58) por:

$$R_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2(1 - \frac{2}{c^2}\phi). \quad (61)$$

Em síntese, considerando o caso em que o tensor momento-energia, para uma matéria não relativística, é igual à sua densidade de massa, ou seja,  $T_{00} = \rho c^2$  (WEINBERG, 1972), podemos reescrever a equação (55) como:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{2}\kappa^2 c^4 \rho. \quad (62)$$

Demonstrado isso, podemos relacionar a equação (62) com a equação de Poisson (47), com o objetivo de obter a constante de acoplamento  $\kappa^2$ .

$$\kappa^2 = \frac{8\pi G}{c^4}. \quad (63)$$

Logom a equação de Einstein pode ser reescrita de forma mais explícita como:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (64)$$

Deduzido isso, podemos afirmar que a Relatividade Geral é completamente compatível com a gravitação newtoniana, tornando, então, essa teoria válida do ponto de vista clássico. Além disso, trouxe respostas para fenômenos físicos que a gravitação newtoniana não respondia, como a deflexão da luz, o desvio de linhas espectrais e o avanço do periélio de Mercúrio (D'INVERNO, 1992).

### 3 BURACO NEGRO NÃO-SINGULAR

Como já mencionado, a Relatividade Geral é a teoria que possui o maior sucesso em descrever a gravitação. No entanto, ao construir um modelo concreto para colapsos gravitacionais, acaba por apresentar certas patologias – como a formação de singularidades e instabilidades – tornando-se insuficiente. De um ponto de vista cosmológico, dados observacionais – (VALENTINO; MELCHIORRI; MENA, 2017) – apontam que certas tensões entre observáveis cosmológicos podem ser contornadas com a introdução de uma componente de vácuo interagente. Conforme mostrado em (BRUNI; MAIER; WANDS, 2022), tal componente pode também fornecer modelos não singulares de universo. Nessa perspectiva, algumas referências, como (MAIER, 2020) e (MAIER, 2022), utilizam-se dessa componente na física de buracos negros. Além disso, a fim de gerar um modelo completo de colapso, levaremos em conta as mesmas considerações feitas em (OPPENHEIMER; SNYDER, 1939), que forneceu uma solução interior para um colapso de poeira sem pressão. Analogamente, visamos explicar um buraco negro formado por um colapso de poeira carregada (MAIER, 2023).

#### 3.1 Solução Interior

Consideremos as equações de campo

$$G_{\mu\nu} = \kappa^2(T_{\mu\nu} - V_I g_{\mu\nu}), \quad (65)$$

onde  $\kappa^2$  é a constante de Einstein (63),  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia do nosso sistema e  $V_I$  é uma componente de vácuo interagente.

Para o sistema em questão, estamos considerando um tensor momento-energia formado por um fluido perfeito de poeira carregada e radiação, em que radiação eletromagnética é ejetada devido à aceleração das cargas, que, por sua vez, "caem" em direção ao centro de distribuição de matéria. Portanto, podemos explicitar as equações desse tensor por:

$$T_{\mu\nu} = {}^{(p)}T_{\mu\nu} + {}^{(\gamma)}T_{\mu\nu} \quad (66)$$

onde  ${}^{(p)}T_{\mu\nu}$  corresponde à poeira carregada e  ${}^{(\gamma)}T_{\mu\nu}$  corresponde à radiação. Podemos então, escrever o tensor momento-energia da poeira carregada como:

$${}^{(p)}T_{\mu\nu} = \rho_d u_\mu u_\nu + \sigma M_{\mu\nu} \quad (67)$$



Note que  $\rho_d$  é a densidade de energia da poeira carregada,  $u_\mu$  é o quadrivetor velocidade e  $\sigma$  é a constante de acoplamento ( $\sigma \propto -1/4\pi$ ). Podemos, também, representar o campo de Maxwell (provocado pela poeira carregada) pelo tensor  $M_{\mu\nu}$

$$M_{\mu\nu} = F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (68)$$

onde o tensor de Faraday é dado por:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu. \quad (69)$$

Por outro lado, podemos explicitar a parte correspondente à radiação de fótons do tensor momento-energia como:

$${}^{(\gamma)}T_{\mu\nu} = \frac{\rho_\gamma}{3}(4u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}), \quad (70)$$

onde  $\rho_\gamma$  é a densidade de energia da radiação. É necessário ressaltar que esse termo do tensor momento-energia (70), corresponde à um banho térmico de photons, constituindo um fluido perfeito de radiação, ou seja, a equação de fluido perfeito toma  $p \propto \rho/3$  (CARROLL, 1997). Diante disso, consideramos a métrica interior FLRW em coordenadas comóveis  $(r, \theta, \phi)$ , que descreve a geometria proporcionada por um fluido homogêneo e isotrópico

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2\right], \quad (71)$$

onde  $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$  é a parte angular da métrica,  $a(t)$  é o fator de escala e  $k$  é a 3-curvatura.

Para que o modelo esteja em conformidade com a Relatividade Geral, as equações de Einstein devem respeitar as identidades de Bianchi (44). Dessa maneira podemos obter as seguintes leis de conservação:

$$\nabla_\mu ({}^{(p)}T^\mu{}_\nu + {}^{(\gamma)}T^\mu{}_\nu - V_I \delta^\mu_\nu) = 0. \quad (72)$$

Para a parte de radiação de fótons do fluido, é possível obter a equação de conservação

$$\nabla_\mu {}^{(\gamma)}T^\mu{}_\nu = 0. \quad (73)$$

Considerando o fluido perfeito em repouso com relação às coordenadas comóveis, a quadrivelocidade pode ser representada por:

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) = \delta_t^\mu, \quad u_\mu = (-1, 0, 0, 0) = -\delta_\mu^t. \quad (74)$$

Portanto, abrindo a equação (73) em termos da derivada covariante, temos:

$$\nabla_\mu^{(\gamma)} T^\mu{}_\nu = \frac{1}{3} \nabla_\mu \rho_\gamma [4\delta_t^\mu (-\delta_\nu^t) + \delta_\nu^\mu] + \frac{1}{3} \rho_\gamma [4(\nabla_\mu \delta_t^\mu)(-\delta_\nu^t) + 4\delta_t^\mu (\nabla_\mu (-\delta_\nu^t)) + \nabla_\mu \delta_\nu^\mu]. \quad (75)$$

Após algum algebrismo, utilizando a métrica (71), podemos reescrever a equação (75) como:

$$\nabla_\mu^{(\gamma)} T^\mu{}_\nu = \frac{1}{3} \left( -3\dot{\rho}_\gamma \delta_\nu^t - 12\rho_\gamma \delta_\nu^t \frac{\dot{a}}{a} \right) = 0, \quad (76)$$

onde  $\dot{a}$  corresponde à derivada temporal do fator de escala. Isto é

$$\dot{\rho}_\gamma + 4\rho_\gamma \frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (77)$$

Por fim, podemos integrar a equação (77) e obter o seguinte resultado:

$$\rho_\gamma = \frac{E_\gamma}{a^4}, \quad (78)$$

onde  $E_\gamma$  corresponde a uma constante positiva de integração. Consideremos, agora, os termos restantes da equação (72).

$$\nabla_\mu^{(p)} T^\mu{}_\nu - V_I \delta_\nu^\mu = 0. \quad (79)$$

Para que essa equação respeite a identidade de Bianchi, vamos considerar as seguintes equações:

$$\nabla_\mu^{(p)} T^\mu{}_\nu = Q_\nu, \quad (80)$$

$$\nabla_\mu (V_I \delta_\nu^\mu) = Q_\nu. \quad (81)$$

Admitindo que  $Q_\nu$  possa ser escrito como:

$$Q_\nu = \tilde{Q}_\nu + J_\alpha F_\nu{}^\alpha, \quad (82)$$

onde  $\tilde{Q}_\nu$  corresponde ao termo de transferência de energia-momentum entre a energia

escura e a poeira carregada; e  $J_\alpha = \epsilon u_\alpha$  corresponde à quadricorrente com  $\epsilon$  sendo a densidade de carga elétrica, temos que

$$\nabla_\mu(\rho_d u^\mu u_\nu) + \nabla_\mu(\sigma M^\mu{}_\nu) = \tilde{Q}_\nu + J_\alpha F_\nu{}^\alpha = \nabla_\mu V_I \delta_\nu^\mu. \quad (83)$$

Primeiramente, vale a pena evidenciar a derivada covariante do tensor momento-energia de Maxwell, podendo expressá-la da seguinte forma:

$$\nabla_\mu(\sigma M^\mu{}_\nu) = \sigma \nabla_\mu(F^\mu{}_\alpha F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}). \quad (84)$$

Tomando a regra do produto da equação (84) e manipulando os índices de forma correta, é possível reescrever a equação como:

$$\sigma \nabla_\mu(F^\mu{}_\alpha F_\nu{}^\alpha - \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}) = \sigma(\nabla_\mu F^\mu{}_\alpha) F_\nu{}^\alpha, \quad (85)$$

onde podemos representar as equações de Maxwell não-homogeneas por:

$$\sigma(\nabla_\mu F^\mu{}_\alpha) F_\nu{}^\alpha = J_\alpha F_\nu{}^\alpha, \quad (86)$$

restando que

$$\nabla_\mu(\rho_d u^\mu u_\nu) = \tilde{Q}_\nu. \quad (87)$$

Antes de explicitarmos, na seção 3.2, a parte correspondente às equações (87) e (81), é necessário determinar algumas funções importantes. Para isso, vamos considerar as equações de Einstein para a geometria (71) e para o tensor momento-energia (66). Sendo assim, considerando o caso de simetria esférica, todos os termos do tensor  $F_{\mu\nu}$  se cancelam, menos o termo  $F_{tr} = F(t, r)$ , de forma que as equações de Einstein seguem como:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3} \left[ \rho_\gamma + \rho_d + V_I + \sigma(1 - kr^2) \frac{F^2(t, r)}{2a^2} \right], \quad (88)$$

onde a equação (88) corresponde à parte puramente temporal das equações de Einstein, ou seja,  $G_{00} = \kappa^2(T_{00} - V_I g_{00})$ . Para a parte puramente espacial, temos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{2a^2} = \frac{\kappa^2}{3} \left[ V_I - \frac{\rho_\gamma}{3} + \sigma(1 - kr^2) \frac{F^2(t, r)}{2a^2} \right]. \quad (89)$$

Ao impor uma densidade de energia homogênea junto a uma componente de vácuo

também homogênea acabamos por inferir  $F(t, r)$  por:

$$F(t, r) = \frac{N(t)}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (90)$$

de forma que  $N(t)$  corresponde ao termo que corrige o número de fótons irradiados durante o colapso. Considerando, agora, as equações de Maxwell (86) e substituindo o tensor de Faraday pela equação (90), obtemos

$$N(t) = \frac{N_0}{a}, \quad (91)$$

$$\epsilon(t, r) = 2\sigma N_0 \left( \frac{\sqrt{1 - kr^2}}{ra^3} \right), \quad (92)$$

para  $N_0$  suficientemente pequeno.

Nesse trabalho, estamos levando em consideração uma componente de vácuo interagente que transfere energia-momentum para a poeira carregada. Mais especificamente, consideramos um caso simples de transferência de energia (BRUNI; MAIER; WANDS, 2022), dada por:

$$\tilde{Q}_\nu = \frac{\xi}{3}(V_0 - V_I)(\nabla_\alpha u^\alpha)u_\nu, \quad (93)$$

onde  $\xi$  é constante de acoplamento. Substituindo (93) em (87), obtemos:

$$\nabla_\mu(\rho_d u^\mu u_\nu) = \frac{\xi}{3}(V_0 - V_I)(\nabla_\alpha u^\alpha)u_\nu. \quad (94)$$

Resolvendo a equação (94) temos:

$$\dot{\rho}_d + 3\rho_d \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = \xi(V_I - V_0) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right). \quad (95)$$

Por outro lado, da substituição da equação (93) em (81), temos:

$$\nabla_\mu(V_I \delta^\mu_\nu) = \frac{\xi}{3}(V_0 - V_I)(\nabla_\alpha u^\alpha)u_\nu. \quad (96)$$

Desse modo, resolvendo a equação (96) para a parte temporal obtemos a seguinte expressão:

$$\dot{V}_I = \xi(V_I - V_0) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right). \quad (97)$$

A partir disso, podemos resolver a integral em (97), utilizando  $\dot{V}_I = \frac{\partial V_I}{\partial a} \dot{a}$ . Dessa forma, é possível concluir que a componente de interação é dada por:

$$V_I = V_0 + \frac{\lambda}{a^\xi}, \quad (98)$$

em que  $\lambda$  é uma constante de integração positiva e  $V_0$  corresponde à constante cosmológica. Encontrado o resultado (98), podemos resolver a equação (95) substituindo o valor de  $V_I$  de modo a  $\rho_d$  depender somente do fator de escala  $a(t)$ :

$$\rho_d = \frac{E_d}{a^3} - \frac{\xi\lambda}{(\xi-3)a^\xi}, \quad (99)$$

onde  $E_d$  é uma constante positiva de integração. Obtidos os termos (78),(90),(91),(98) e (99), podemos reescrever as equações de Einstein (88) e (89) da seguinte maneira.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3} \left[ V_0 + \frac{E_d}{a^3} + \left( \frac{2E_\gamma + \sigma N_0^2}{2a^4} \right) - \frac{3\lambda}{(\xi-3)a^\xi} \right], \quad (100)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{2a^2} = \frac{\kappa^2}{3} \left[ V_0 - \left( \frac{2E_\gamma - 3\sigma N_0^2}{6a^4} \right) + \frac{\lambda}{a^\xi} \right]. \quad (101)$$

Para que a interação evite a singularidade durante o colapso gravitacional, devemos fixar certos valores para o parametro  $\xi$ , dessa forma nós podemos definir um potencial  $V(a)$  reescrevendo a equação (100) da seguinte forma:

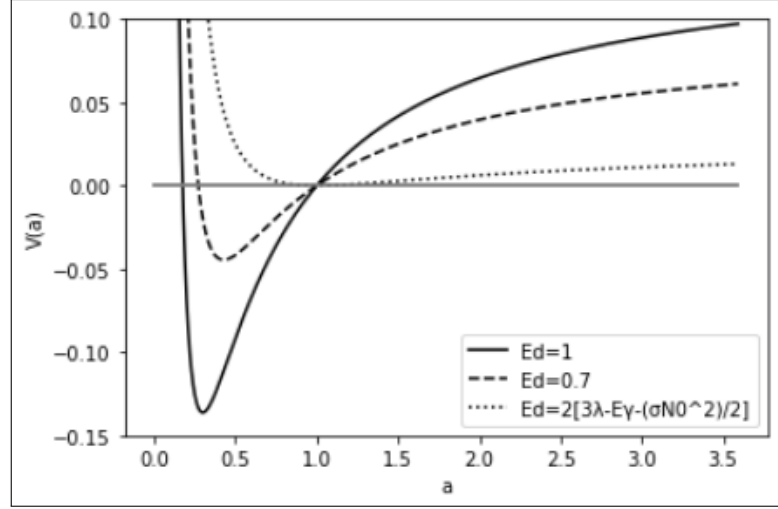
$$\frac{\dot{a}^2}{2} + V(a) = 0, \quad (102)$$

onde  $V(a)$  é dado por:

$$V(a) = \frac{k}{2} - \frac{\kappa^2}{6} \left[ V_0 a^2 + \frac{E_d}{a} + \left( \frac{2E_\gamma + \sigma N_0^2}{2a^2} \right) - \frac{3\lambda}{(\xi-3)a^{(\xi-2)}} \right]. \quad (103)$$

É possível notar que enquanto  $\xi \geq 4$ , uma barreira infinita poderá evitar a formação da singularidade durante o colapso previsto pela Relatividade Geral. Diante disso, podemos plotar um gráfico  $V(a) \times a(t)$  afim de visualizar a barreira de potencial com mais detalhes.

Pela figura 5 é possível ver a barreira de potencial evitando a singularidade e, além disso, podemos perceber que para  $E_d = 2(3\lambda - E_\gamma - \frac{1}{2}(\sigma N_0^2))$  temos o limite inferior para configurações limitadas desse potencial.

Figura 5 - Gráfico  $V(a) \times a(t)$ 

Legenda: O potencial  $V(a)$  em relação a  $a(t)$  para vários valores de  $E_d$ , fixando os valores de  $\lambda = 0.05$ ,  $\xi = 4$ ,  $E_\gamma = 10^{-4}$ ,  $\sigma = 1$ ,  $N_0 = 10^{-5}$ ,  $\kappa = 1$  e  $V_0 = 0$ .

Fonte: O autor, 2023.

### 3.2 Métrica Exterior

Afim de fixar o parâmetro  $\xi$ , buscamos igualar a geometria interior (71) com a solução exterior na superfície  $r \equiv \gamma = \text{constante}$ . Para isso, consideremos novas coordenadas  $(\bar{t}, \bar{r}, \bar{\theta}, \bar{\phi})$ , tais que suas transformações são definidas por:

$$\bar{t} = \chi(\psi(t, \bar{r})), \quad \bar{r} = a(t)r, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\phi} = \phi. \quad (104)$$

Diante disso, podemos perceber que a parte angular da métrica (71), permanecerá idêntica após a mudança de coordenadas, ou seja,  $d\Omega^2 = d\bar{\Omega}^2$ . Por outro lado, devemos abrir com mais detalhes a parte temporal e radial. Logo, considerando o infinitésimo dessas variáveis, temos:

$$d\bar{t} = \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{r}} d\bar{r} \right], \quad (105)$$

$$d\bar{r} = a dr + \dot{a} r dt. \quad (106)$$

Reescrevendo (105) e (106) para as variáveis  $r$  e  $t$ , temos:

$$dt = \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right)^{-1} d\bar{t} - \left( \frac{\partial \psi}{\partial \bar{r}} \right) d\bar{r} \right], \quad (107)$$

$$dr = \frac{d\bar{r}}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2} \bar{r} dt. \quad (108)$$

Tomando o elemento de linha para essas novas variáveis, temos:

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{-2} \left( \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right)^{-2} \left[ 1 - \frac{\dot{a}^2 \bar{r}^2}{(a^2 - k\bar{r}^2)} \right] \right\} d\bar{t}^2 - \\ & - \left\{ 2 \left( \frac{\partial \chi}{\partial \psi} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{-1} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \bar{r}} \right) \left( 1 - \frac{\dot{a}^2 \bar{r}^2}{a^2 - k\bar{r}^2} \right) - \frac{a\dot{a}\bar{r}}{a^2 - k\bar{r}^2} \right] \right\} d\bar{r} d\bar{t} + \\ & + \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{-2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \bar{r}} \right)^2 \left( 1 - \frac{\dot{a}^2 \bar{r}^2}{a^2 - k\bar{r}^2} \right) - \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \bar{r}} \right)^1 \left( \frac{2\dot{a}a\bar{r}}{a^2 - k\bar{r}^2} \right) - \frac{1}{a^2 - k\bar{r}^2} \right\} d\bar{r}^2 - \\ & - \bar{r}^2 d\bar{\Omega}^2. \end{aligned} \quad (109)$$

Para que a métrica seja diagonal, obtemos a seguinte condição:

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^{-1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \bar{r}} \right) = \frac{a\dot{a}\bar{r}}{a^2 - \bar{r}^2(k + \dot{a}^2)}. \quad (110)$$

Sendo assim, se substituirmos a equação (110) em  $g_{\bar{r}\bar{r}}$  da métrica (109), obteremos a seguinte componente:

$$g_{\bar{r}\bar{r}} = - \left[ \frac{a^2}{a^2 - \bar{r}^2(k + \dot{a}^2)} \right] \Big|_{r=\gamma} = - \left[ 1 - \frac{\bar{r}^2}{a^2} (k + \dot{a}^2) \right]^{-1} \Big|_{r=\gamma}. \quad (111)$$

Com o objetivo de encontrar  $g_{\bar{t}\bar{t}}$ , podemos resolver a equação diferencial parcial (110). Dessa forma, podemos obter a solução para a função  $\psi(t, \bar{r})$  dada por:

$$\psi(t, \bar{r}) = \delta + \frac{\mu}{a} \sqrt{a^2 - k\bar{r}^2} \exp \left( -k \int \frac{dt}{a\dot{a}} \right). \quad (112)$$

Em seguida, utilizando a técnica do fator integrante (WEINBERG, 1972), podemos obter a seguinte equação diferencial para o a função  $\chi$ .

$$\frac{d\chi}{d\psi} = \frac{a^2 \dot{a}}{a^2 - \bar{r}(k + \dot{a}^2)} \left[ \frac{\sqrt{a^2 - k\bar{r}^2}}{k(\psi - \delta)} \right]. \quad (113)$$

É então possível reescrever o  $g_{\bar{t}\bar{t}}$  substituindo a equação (113) e a derivada temporal da equação (112) na métrica (109).

$$g_{\bar{t}\bar{t}} = \left[ \frac{a^2 - \bar{r}^2(k + \dot{a}^2)}{a^2} \right] \Big|_{r=\gamma} = \left[ 1 - \frac{\bar{r}^2}{a^2}(k + \dot{a}^2) \right] \Big|_{r=\gamma}. \quad (114)$$

Finalmente, obtemos a relação entre  $g_{\bar{t}\bar{t}}$  e  $g_{\bar{r}\bar{r}}$ .

$$g_{\bar{t}\bar{t}} = -\frac{1}{g_{\bar{r}\bar{r}}}. \quad (115)$$

Além disso, é possível substituir o termo  $\dot{a}^2$  da equação (114) pela equação (102), dessa forma reescrevemos a componente  $g_{\bar{t}\bar{t}}$  como:

$$g_{\bar{t}\bar{t}} = 1 - \frac{\bar{r}^2}{a^2} \left( \frac{\kappa^2}{3} \left[ V_0 a^2 + \frac{E_d}{a} + \left( \frac{2E_\gamma + \sigma N_0^2}{2a^2} \right) - \frac{3\lambda}{(\xi - 3)a^{(\xi-2)}} \right] \right) \Big|_{r=\gamma}. \quad (116)$$

Definindo então a superfície do buraco negro pela coordenada comóvel  $r = \gamma$  onde  $\gamma$  é uma constante, podemos reescrever a equação (116) somente para a variável  $\bar{r}$ . Para tal propósito, é necessário definir uma função  $F(\bar{r})$  dada por:

$$F(\bar{r}) = 1 - \frac{\kappa^2 E_d \gamma^3}{3\bar{r}} - \frac{\kappa^2 \gamma^4}{3} \left( \frac{2E_\gamma + \sigma N_0^2}{2\bar{r}^2} \right) + \frac{\kappa^2 \lambda \gamma^\xi}{(\xi - 3)\bar{r}^{\xi-2}} - \frac{\kappa^2 V_0 \bar{r}^2}{3}, \quad (117)$$

onde fixamos as condições iniciais por  $a(0) = 1$  e  $\dot{a} = 0$ . Podemos então reescrever a métrica (109) da seguinte forma:

$$ds^2 = F(\bar{r})d\bar{t}^2 - \frac{1}{F(\bar{r})}d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\bar{\Omega}). \quad (118)$$

Dessa maneira, a solução exterior restaura a métrica de Reissner-Nordström-de Sitter desde de que  $\xi = 4$ . Para esclarecer melhor essa afirmativa, tomamos os seguintes valores para as constantes de integração:

$$E_d = \frac{3M}{4\pi\gamma^3}, \quad \lambda = \frac{q^2}{2A^2\epsilon_0} + \frac{E_\gamma}{3} + \frac{\sigma N_0^2}{6}, \quad (119)$$

onde  $A = 4\pi\gamma^2$  corresponde à área comóvel de diestribuição de matéria,  $E_d$  corresponde à densidade de massa do buraco negro e  $q$  corresponde à carga total do buraco negro já formado. Diante disso, reescrevemos a equação (117) por:

$$F(\bar{r}) = 1 - \frac{2GM}{\bar{r}} + \frac{\beta_q^2}{\bar{r}^2} - \kappa^2 \frac{V_0}{3} \bar{r}^2, \quad (120)$$

onde  $\beta_q^2 \equiv q^2 G / 4\pi\epsilon_0$ .

No estágio em que nos encontramos, uma observação se faz importante. Consideremos o início do colapso da distribuição interna de matéria: as partículas carregadas



são aceleradas ao centro de distribuição de matéria, um fluxo de radiação eletromagnética é ejetado para o espaço exterior e o número de fótons dentro da nuvem aumenta. Esse processo continua até o horizonte de eventos se formar e a ejeção de radiação eletromagnética cessar por completo. Dentro do horizonte de eventos a barreira de potencial evita a singularidade. Após um tempo finito da formação do horizonte de eventos, um observador externo à distribuição de matéria não é mais capaz de detectar nada além do campo de Maxwell, de sorte que o espaço-tempo exterior tende à Reissner-Nordström-de Sitter após um tempo finito – imediatamente após a formação do horizonte de eventos.

Finalmente, podemos mostrar que para  $V_0$  suficientemente pequeno, o buraco negro em questão possuirá um horizonte de eventos  $\bar{r}_+$  e um horizonte de Cauchy  $\bar{r}_-$  (CHANDRASEKHAR, 1998) dados respectivamente por:

$$\bar{r}_+ = GM + \sqrt{G^2 M^2 - \beta_q^2}, \quad (121)$$

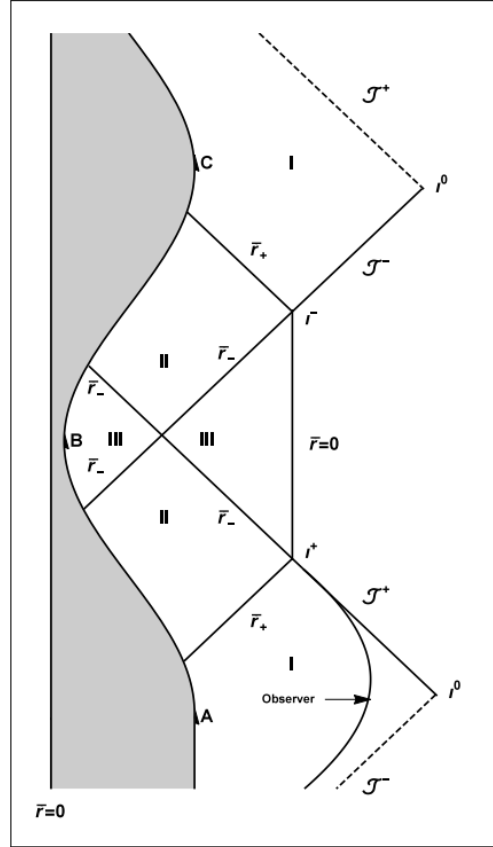
$$\bar{r}_- = GM - \sqrt{G^2 M^2 - \beta_q^2}. \quad (122)$$

Para o domínio de parâmetros da figura 5, é possível perceber que, pela equação (119), temos que  $\lambda > (\frac{E_\gamma}{3} + \frac{\sigma N_0^2}{6})$ . Nesse sentido, é fácil ver que  $E_d > 2(3\lambda - E_\gamma - \sigma N_0^2/2)$ , ou seja, uma configuração limitada é satisfeita, tendo como consequência a oscilação da distribuição de matéria entre um  $\bar{r} = \gamma$  e  $\bar{r} = \gamma a_{min}$ . Para ilustrarmos a estrutura causal do nosso espaço-tempo exterior, vamos considerar o seguinte diagrama de Penrose<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup> O diagrama de Penrose pode ser explicado com mais detalhes em (CHANDRASEKHAR, 1998), em que no livro o diagrama é montado a partir da métrica de Reissner-Nordström sem a componente de vácuo interagente.

Figura 6 - Diagrama de Penrose para o espaço exterior



Legenda: A região I ( $\infty > \bar{r} > \bar{r}_+$ ) corresponde à região fora do horizonte de eventos, a região III ( $\bar{r}_- > \bar{r} > \gamma_{a_{min}}$ ) corresponde à região posterior ao horizonte de Cauchy, em que a distribuição de matéria se encontra em regime oscilatório, e a região II ( $\bar{r}_+ > \bar{r} > \bar{r}_-$ ) conecta as outras duas regiões e delimita a região entre os dois horizontes. A parte pintada em cinza, corresponde à parte interior da distribuição de matéria, em que a linha ABC representa como a superfície dessa matéria evolui com o tempo. A linha indicada pela seta "observer", representa um observador externo a uma distancia fixa do buraco negro. Por fim, os pontos de interceção entre a distribuição de matéria e o diagrama, correspondem a formação dos horizontes do nosso modelo de buraco negro.

Fonte: (MAIER, 2020)

## 4 CONCLUSÃO

Ao longo deste trabalho, foi feita uma análise a respeito de alguns dos pilares da Relatividade Geral. Apresentamos definições dos principais objetos utilizados nessa teoria, por exemplo, explicitamos o que é a métrica; como um vetor se desloca em um espaço curvo; como identificamos que a geometria é pseudo-riemanniana; e o como caracterizamos a curvatura do espaço. Em seguida, trouxemos uma formulação da Relatividade Geral, explicitando seus princípios e a formulação das principais equações dessa teoria, as equações de Einstein. Também discutimos correções dessa teoria, a fim de motivar a alteração proposta pelo modelo apresentado de buracos negros não singulares que utilizamos neste trabalho.

A partir disso, pudemos concluir que o estudo de buracos negros não singulares é de imensa importância, haja vista que esses modelos buscam trazer uma resposta a alguns problemas ainda existentes na teoria da Relatividade Geral. Para o modelo em questão neste trabalho, foi possível identificar que, acrescentar uma componente de vácuo interagente durante um colapso gravitacional, é um mecanismo concreto para evitar a singularidade. Para isso, foi necessário atribuímos à solução interior FLRW uma troca simples de energia entre a energia escura e a nuvem carregada. Diante disso, fixamos o parâmetro de interação,  $\xi$ , e verificamos que, para  $\xi \geq 4$ , a singularidade é evitada. Por outro lado, se há a igualdade, a métrica exterior coincide com a métrica já conhecida de Reissner-Nordström-de Sitter. Além disso, foi possível verificar que, para o nosso modelo, a componente de vácuo interagente não só evita a singularidade, mas também promove um regime oscilatório para a distribuição de matéria, para um certo domínio de parâmetros.

Por fim, vale a pena ressaltar que o trabalho apresentado nesta monografia é parte constituinte de um projeto ainda maior, que se propõem a estudar a atribuição de uma componente de vácuo interagente em diversos outros tipos de modelo, como por exemplo, o estudo dessa mesma atribuição em diferentes objetos astrofísicos. Outra perspectiva possível, seria ampliar o estudo de buracos negros em diferentes teorias alternativas da gravitação, como por exemplo: teorias  $f(R)$ , teoria Horndeski, teoria Einstein-Cartan, entre outras.

## REFERÊNCIAS

- BERGMANN, Peter G. *Introduction to the theory of relativity*. Mineola, NY: Dover Publications, 1976. (Dover Books on Physics).
- BORDE, Arvind. Regular black holes and topology change. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 55, n. 12, p. 7615–7617, jun 1997. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.55.7615>>.
- BRUNI, Marco; MAIER, Rodrigo; WANDS, David. Nonsingular cosmology from an interacting vacuum. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 105, n. 6, mar 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.063532>>.
- CARROLL, Sean M. *Lecture Notes on General Relativity*. arXiv, 1997. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>>.
- CHANDRASEKHAR, S. *The mathematical theory of black holes*. Oxford, England: Clarendon Press, 1998. (Oxford Classic Texts in the Physical Sciences).
- CHENG, Ta-Pei. *Relativity, Gravitation and Cosmology*. 2. ed. London, England: Oxford University Press, 2009. (Oxford Master Series in Physics).
- D'INVERNO, Ray. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford, England: Clarendon Press, 1992.
- FROLOV, Valeri P.; MARKOV, M. A.; MUKHANOV, Viatcheslav F. THROUGH A BLACK HOLE INTO A NEW UNIVERSE? *Phys. Lett. B*, v. 216, p. 272–276, 1989.
- LANDAU, L D; LIFSHITZ, E M. *The classical theory of fields*. 4. ed. Oxford, England: Butterworth-Heinemann, 1987.
- MAIER, Rodrigo. Nonsingular black holes from charged dust collapse: A concrete mechanism to evade interior singularities in general relativity. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific Pub Co Pte Lt, v. 29, n. 14, p. 2043023, oct 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/Fs0218271820430233>>.
- \_\_\_\_\_. Yukawa black holes from interacting vacuum. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 39, n. 15, p. 155008, jul 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6382/2Fac7d8e>>.
- \_\_\_\_\_. *Stellar Instability from Parametric Resonance*. arXiv, 2023. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2301.01329>>.
- OLMO, Gonzalo; RUBIERA-GARCIA, Diego. Nonsingular black holes in  $f(R)$  theories. *Universe*, MDPI AG, v. 1, n. 2, p. 173–185, aug 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/Universe1020173>>.
- OPPENHEIMER, J. R.; SNYDER, H. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 56, p. 455–459, Sep 1939. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.56.455>>.

PENROSE, Roger. Gravitational collapse and space-time singularities. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 14, p. 57–59, Jan 1965. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.14.57>>.

RIESS, Adam G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, American Astronomical Society, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, sep 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1086%2F300499>>.

SABBATA, Vanzo De; GASPERINI, Maurizio. *Introduction To Gravitation*. Singapore, Singapore: World Scientific Publishing, 1986.

SCHUTZ, Bernard F. *A First Course in General Relativity*. 2. ed. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2009.

VALENTINO, Eleonora Di; MELCHIORRI, Alessandro; MENA, Olga. Can interacting dark energy solve the  $h_0$  tension? *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 96, n. 4, aug 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103%2Fphysrevd.96.043503>>.

WEINBERG, Steven. *Gravitation and cosmology*. Nashville, TN: John Wiley & Sons, 1972.